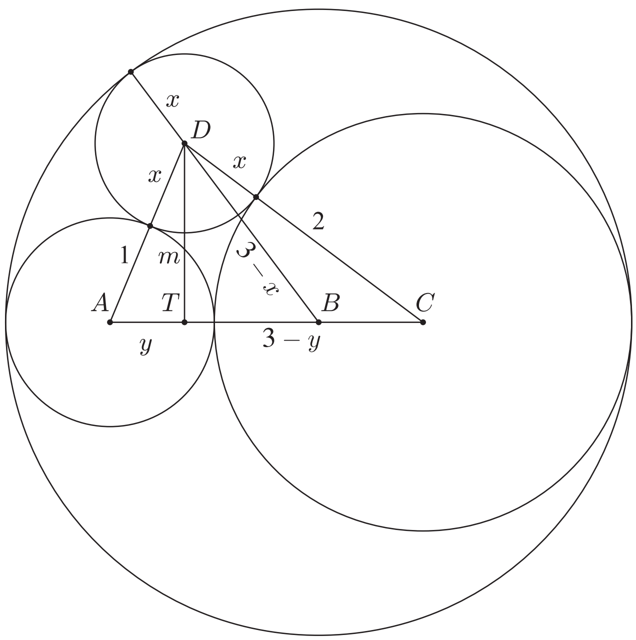
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Rajzoljon egy 3 egység sugarú körbe egy 1 és egy 2 egység sugarú kört, amelyek egymást kívülről, a nagy kört pedig belülről érintik! Határozza meg annak a körnek a sugarát, amely a nagy kört belülről, a két kisebb kört pedig kívülről érinti!



Megoldás. Jelölje rendre A, B, C az 1 sugarú k_1, a 3 sugarú k_3 és a 2 sugarú k_2 körök középpontjait! k_1 belülről érinti k_3-at, tehát $AB = 2$. k_2 belülről érinti k_3-at, tehát $BC = 1$. k_1 kívülről érinti k_2-t, tehát $AC = 3$. Ezért a három kör középpontja egy egyenesen van, és ekkor a három kör a feltételeknek megfelelően érinti egymást. Legyen a keresett kör középpontja D, a sugara x! Ekkor: $CD = 2 + x$, $AD = 1 + x$ és $BD = 3 - x$.

Legyen az ACD háromszög AC oldalához tartozó magasságának talppontja T és vezessük be a $DT = m$, $AT = y$ jelöléseket! Ekkor az ATD, TBD és TCD derékszögű háromszögekben felírt Pitagorasz-tételek alapján:

$$(1 + x)^2 = y^2 + m^2,$$

$$(3 - x)^2 = (2 - y)^2 + m^2,$$

$$(2 + x)^2 = (3 - y)^2 + m^2.$$

(T az A és B között van, mert az ABD háromszögben az ADB szög a legnagyobb. $AB = 3 > 3 - x = BD$. A k_3 kör B-n és D-n átmenő sugara 3, tehát $2x < 3$, és ezért $AB = 3 > 1 + x = AD$.)

Az első két egyenlet különbségéből rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$y = 2x - 1.$$

Ehhez hasonlóan az első és harmadik egyenletéből:

$$y = 1 - \frac{x}{3}.$$

Tehát: $2x - 1 = 1 - \frac{x}{3}$ vagyis a keresett kör sugara $\frac{6}{7}$ egység. (Ez a kör megfelel a feladat feltételeinek. Két ilyen kör van. Ezek az AC egyenesre szimmetrikusak.)

Megjegyzés: A Stewart-tétel felírásával azonnal megkapjuk x-et.

2. Négy házaspár moziba megy. Sikerül egymás mellé kapniuk 8 jegyet. Hányféleképpen ülhetnek le a nyolc helyre, ha sem azonos neműek, sem pedig házastársak nem szeretnének egymás mellé ülni?

Megoldás. Ültessük le először az egyik nem képviselőit az 1., 3., 5. és 7 helyre: $A * B * C * D$! Legyen A házastársa a, B házastársa b stb. Csak háromféle folytatás lehetséges: $AcBdCaDb$, $AcBdCbDa$ és $AdBaCbDc$. Azaz 3 lényegesen különböző elrendezést kapunk! Most már csak azt kell eldöntenünk, hogy melyik betű melyik személyt jelöli. Ezt $2 \cdot 4!$-féleképpen tehetjük meg, mivel a nagy betűk vagy a férfiakat, vagy a nőket jelölik. Az A, B, C és D betűket pedig $4!$-féleképpen oszthatjuk szét a házaspárok között. Így összesen 144 elrendezés lehetséges.

3. Az x, y és z valós számokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 91, \\ x^5 + y^5 + z^5 &= 4651. \end{aligned}$$

Mekkora lehet x, y és z?

Megoldás.

$$1 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz),$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + xy(x + y) + xz(x + z) + yz(y + z) = \\ &= 91 + xy(1 - z) + xz(1 - y) + yz(1 - x) = \\ &= 91 + xy + xz + yz - 3xyz. \end{aligned}$$

A kapott két egyenlőséget összevetve az kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= xyz - 30, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 61 - 2xyz, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(xyz-30)^2 = (xy+xz+yz)^2 &= x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2xyz(x+y+z) = \\
&= x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2xyz.
\end{aligned}
$$

Tehát: $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=(xyz-30)^2-2xyz$.

Végül a kapott eredményeket felhasználva:

$$
\begin{aligned}
91\cdot(61-2xyz) &= \left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) = \\
&= x^5+y^5+z^5+x^2y^2(x+y)+x^2z^2(x+z)+y^2z^2(y+z) = \\
&= 4651+x^2y^2(1-z)+x^2z^2(1-y)+y^2z^2(1-x) = \\
&= 4651+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-xyz(xy+xz+yz) = \\
&= 4651+(xyz-30)^2-2xyz-xyz(xyz-30) = 5551-32xyz.
\end{aligned}
$$

Ebből az következik, hogy $xyz=0$.

Ha $z=0$, akkor a fentiek alapján: $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=61-2(-30)=121$.

Tehát, $x-y=\pm11$. De $x+y=1$, és ezért: $x_1=6$, $y_1=-5$, $z_1=0$; $x_2=-5$, $y_2=6$, $z_2=0$.

Ugyanígy kapunk még négy megoldást. $x_3=6$, $y_3=0$, $z_3=-5$; $x_4=-5$, $y_4=0$, $z_4=6$, $x_5=0$, $y_5=6$, $z_5=-5$; $x_6=0$, $y_6=-5$, $z_6=6$. A kapott megoldások kielégítik az egyenletrendszert.