

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $S = \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ egész része nem lehet négyzetszám!

2. Kiszámoltuk, hogy hány olyan n -jegyű ($n > 1$) szám van, ahol bármely két szomszédos jegy összege osztható 3-mal. A kapott eredmény végződhet-e 2012-re?

3. Az ABC egyenlőszárú háromszög k köréírt körét belülről, a háromszög AC és BC szárait pedig rendre a P és Q pontokban érinti a k_1 kör.

Bizonyítsuk be, hogy PQ felezőpontja az ABC háromszög beírt körének középpontja!

4. Az x, y, z, u valós számokra teljesül, hogy

$$4x\sqrt{4-x^2} - 3y\sqrt{3-y^2} + 2z\sqrt{2-z^2} - u\sqrt{1-u^2} = 15.$$

Mekkora az xy^2z^2u szorzat értéke?

5. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az éleket pirossal vagy kézzel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű él indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket! Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is ki-színezzük.

Összesen hány háromszöget színezzük be?