Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[8048]{1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 4023!\cdot (1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4} < 2012!$$

Megoldás. Emeljük mindkét oldalt 8048-adik hatványra, majd osszunk le $(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4$ kifejezéssel:

$$1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 4023! < \frac{2012!^{8048}}{(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4}$$

Az átalakítás ekvivalens, mivel minden kifejezés pozitív. 1 pont

Az egyenlőtlenség jobb oldalán vizsgáljuk 2, 3, …, 2012 hatványkitevőjét:

$$\frac{2012!^{8048}}{(1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2012!)^4} = \frac{(2)^{8048}}{\left((2)^{2011}\right)^4}\cdot \frac{(3)^{8048}}{\left((3)^{2010}\right)^4}\cdot \ldots \cdot \frac{(2012)^{8048}}{(2012)^4} = 2^4\cdot 3^8\cdot \ldots \cdot 2012^{8044}. \qquad \text{2 pont}$$

A bal oldalon lévő $1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 4023!$ szorzat tényezőit csoportosítsuk kettesével, és tekintsük a $(2k)!\cdot(2k+1)!$ kifejezéseket ($k = 1, 2, \ldots, 2011$):

$$(2k)!\cdot (2k+1)! =$$
$$= \left[2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k)\right]\cdot \left[1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k)\cdot (2k+1)\right].$$

Az első szögletes zárójelben lévő szorzatban 2 és $2k$, 3 és $(2k-1)$, …, k és $(k+2)$ párokra alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést:

$$\overbrace{2\cdot \underbrace{3\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k-1)}\cdot 2k} <$$

$$< \left(\frac{2+2k}{2}\right)^2\cdot \left(\frac{3+(2k-1)}{2}\right)^2\cdot \ldots \cdot \left(\frac{k+(k+2)}{2}\right)^2\cdot (k+1) = (k+1)^{2k-1}.$$

A második szögletes zárójelben lévő kifejezésre hasonlóan adódik, hogy:

$$\overbrace{1\cdot \underbrace{2\cdot \ldots \cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (2k)}\cdot (2k+1)} <$$

$$< \left(\frac{1+(2k+1)}{2}\right)^2\cdot \left(\frac{2+2k}{2}\right)^2\cdot \ldots \cdot \left(\frac{k+(k+2)}{2}\right)^2\cdot (k+1) = (k+1)^{2k+1}. \qquad \text{2 pont}$$

Ez alapján $(2k)! \cdot (2k+1)! < (k+1)^{4k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2011)$. 1 pont

Így a bal oldalra adott felső becslés $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 4023! < 2^4 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 2012^{8044}$.

Mivel $2^4 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 2012^{8044}$ éppen a jobb oldal értéke, az egyenlőtlenséget bebizonyítottuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Van 2012 darab (nem feltétlenül különböző) pozitív számunk: $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$, melyek összege $2S$. A k természetes számot *felezőnek* nevezzük, ha az a_i számok közül kiválasztható k, amelyek összege éppen S. Legfeljebb hány különböző k természetes szám lehet *felező?*

Megoldás. x és $2012 - x$ egyszerre felező, hiszen ha néhány szám összege S, akkor a maradéké is. 1 pont

Ha 1 (és így 2011) felező, akkor más már nem lehet az, hiszen ha 1 felező, akkor az egyik szám S, így rajta kívül csak úgy jöhet ki az S összeg, ha az összes többi számot felhasználjuk. 1 pont

Most megmutatjuk, hogy megadhatók az $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ számok úgy, hogy a $\{2, 3, \ldots, 2010\}$ halmaz minden eleme felező. Az előző észrevétellel együtt ebből következik, hogy legfeljebb 2009 különböző felező k lehetséges. 1 pont

Megadunk 2012 megfelelő számot:

$$\left\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \ldots, 2^{1004}, 2^{1004}\right\}.$$ 1 pont

A számok összege

$$2S = 2 + 2 \cdot \left(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{1004}\right) = 2 + 2 \cdot \left(2^{1005} - 1\right) = 2^{1006},$$

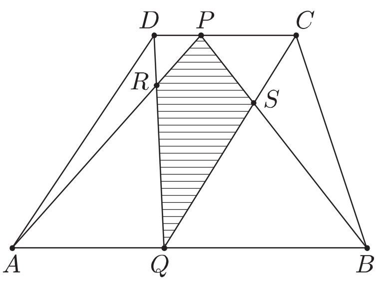
vagyis $S = 2^{1005}$. 1 pont

Az alábbiakból látható, hogy $k = 2, 3, 4, 5, \ldots, 1006$ felező.

$k = 2$: $S = 2^{1004} + 2^{1004}$
$k = 3$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1003}$
$k = 4$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1002}$
$k = 5$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1001} + 2^{1001}$
...
$k = 1006$: $S = 2^{1004} + 2^{1003} + 2^{1002} + 2^{1001} + \cdots + 2 + 1 + 1$. 1 pont

A $k = 1007, 1008, \ldots, 2010$ értékekre pedig már nem kell konstrukciót adnunk, hiszen ha x felező, akkor $N - x$ is. 1 pont

Összesen: 7 pont



1. ábra

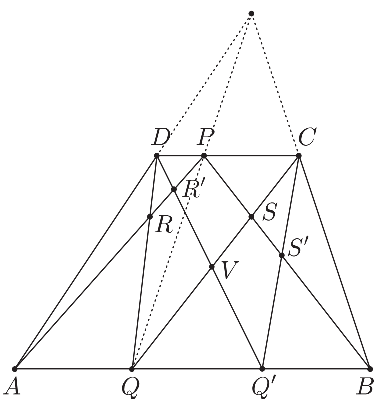
3. Egy $ABCD$ trapéz CD alapján adott egy P belső pont (lásd 1. ábra!).

Hogyan válasszuk meg a másik AB alap Q belső pontját, ha azt szeretnénk, hogy a $PRQS$ négyszög területe a lehető legnagyobb legyen?

(R az AP és a DQ szakaszok metszéspontja, míg S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja).

I. megoldás. A következő sejtést fogjuk igazolni:

A $PRQS$ négyszög területe pontosan akkor maximális, ha $\dfrac{DP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB}$ (, és persze Q A és B között van).



2. ábra

Bizonyítás: Vegyük fel Q-t a sejtésnek megfelelően, és vegyünk fel egy ettől különböző tetszőleges Q' pontot is az AB oldalon! (Q'-t úgy vesszük fel, hogy Q és B közrefogja, ha Q'-t A és Q fogná közre, a bizonyítás teljesen ugyanígy menne.)

Azt fogjuk belátni, hogy akárhogy is vettük fel a Q' pontot a kialakuló $PRQS$ négyszög területe nagyobb, mint a $PR'Q'S'$ négyszögé. 1 pont

(Ahol: R az AP és a DQ szakaszok metszéspontja, S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja, míg R' az AP és a DQ' szakaszok metszéspontja, S' a BP és a CQ' szakaszok metszéspontja, illetve még egy fontos pontunk lesz: V a DQ' és a CQ metszéspontja) Lásd 2. ábra!

Vagyis igazolandó: $T(PRQS) > T(PR'Q'S')$. („=” pontosan akkor lenne, ha $Q = Q'$.)

(A következők során többször fogunk valamely vizsgálandó sokszöget több kisebb sokszögre darabolni, illetve az egyenlőtlenség két oldalán ugyanazt a területet elhagyni.)

$PRQS$-t, illetve $PR'Q'S'$-t feldarabolva igazolandó:

$$T(PR'VS) + T(R'RQV) > T(PR'VS) + T(SVQS').$$

Ez pontosan akkor igaz, ha $T(R'RQV) > T(SVQS')$.

Az utóbbi egyenlőtlenségben szereplő négyszögek részei a közös alapú, és magasságú (így közös területű) $QQ'D$, illetve $QQ'C$ háromszögeknek, így a következő igazolandó:

$$T(QQ'D) - T(QQ'V) - T(RR'D) \geqq T(QQ'C) - T(QQ'V) - T(SS'C).$$

Elhagyva két oldalon a közös területeket: $-T(RR'D) > -T(SS'C)$, vagyis az igazolandó állításunk

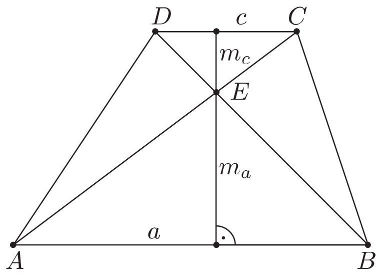
$$T(SS'C) > T(RR'D).$$ 1 pont

Ez utóbbi állítás igazolásához a következő segédtételt fogjuk igazolni:

Lemma: *Ha az $ABCD$ trapéz CD alapján P-t, illetve AB alapján Q-t úgy vesszük fel, hogy $\dfrac{DP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB}$ teljesüljön, akkor RS párhuzamos lesz az alapokkal.* 1 pont

(R az AP és DQ szakaszok metszéspontja, míg S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja).

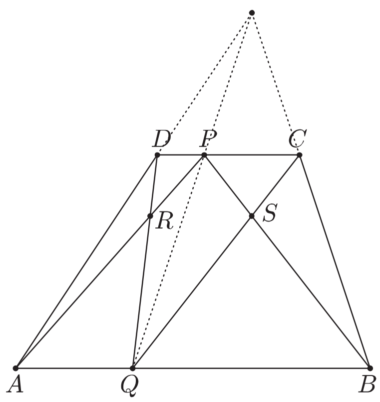
Lemma bizonyítása: Tekintsük a következő ábrát, és használjuk a jelöléseit!



3. ábra

Az ABE és a CDE háromszögek hasonlóak (megfelelő szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{a}{c}$, így a két háromszögben lévő megfelelő szakaszok aránya is ez, vagyis $\lambda = \dfrac{a}{c} = \dfrac{m_a}{m_c}$, innen (ha a trapéz magasságát m-mel jelöljük) $m_a = m \cdot \dfrac{a}{a+c}$, ami megegyezik az E pont és az AB alap távolságával.

Most nézzük a lemmában szereplő pontok esetén a trapézunkat:



4. ábra

A PQ szakasszal az eredeti $ABCD$ trapéz két trapézra bontható. Nevezzük most az AQ szakaszt a-nak, míg a DP szakaszt c-nek.

Ekkor a fentiek szerint R távolsága az AB alaptól: $m_a = m \cdot \dfrac{a}{a+c}$.

$\dfrac{DP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB}$ miatt valamely pozitív μ-re $QB = \mu \cdot a$, és $PC = \mu \cdot b$.

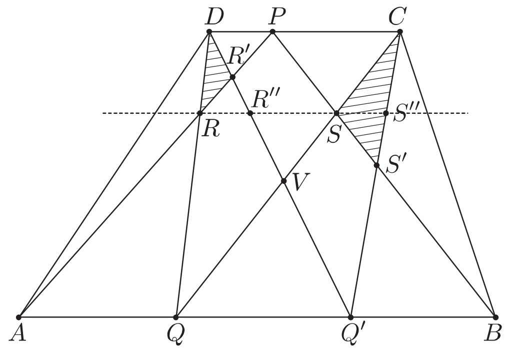
De akkor a QBS háromszög QB-hez tartozó magassága (, vagyis az S pont távolsága az AB alaptól):

$$m_{\mu\cdot a} = m\cdot\frac{\mu\cdot a}{\mu\cdot a+\mu\cdot c} = m\cdot\frac{a}{a+c}.$$

Vagyis az R és az S pont azonos távolságra van az AB alaptól, ahogy azt a lemmában igazolni szerettük volna. 1 pont

Most térjünk vissza az igazolandó $T(SS'C) > T(RR'D)$ állításhoz!

Tekintsük az 5. ábrát! Ez csak abban különbözik a 2. ábrától, hogy berajzoltuk az RS egyenesét, és ezen egyenes metszéspontjait $Q'D$-vel, illetve $Q'C$-vel elneveztük R''-nek, illetve S''-nek.



5. ábra

R'' és D közrefogja R'-t (vagyis R' közelebb van a DC alaphoz, mint R''), míg S' és C közrefogja S''-t (vagyis S' közelebb van az AB alaphoz, mint S''), mert a Q' pontot úgy vettük fel, hogy Q és B közrefogja Q'-t. 1 pont

Így $T(SS'C) = T(SS''C) + T(SS'S'')$, míg $T(RR'D) = T(RR''D) - T(RR''R')$.

Valamint $RR''D$ hasonló $QQ'D$-hez, míg $SS''C$ hasonló a $QQ'D$-vel azonos területű $QQ'C$-hez; és mindkét esetben a hasonlóság aránya azonos (hiszen a fent bizonyított lemma miatt R és R'', illetve S és S'' távolsága az AB alaptól azonos), vagyis

$$T(RR''D) = T(SS''C).$$ 1 pont

Innen következik a bizonyítandó $T(SS'C) > T(RR'D)$ állítás, mert

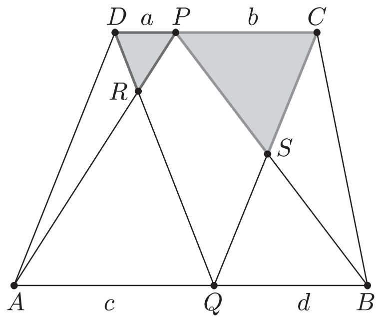
$$T(SS'C) = T(SS''C) + T(SS'S'') >$$
$$> T(SS''C) = T(RR''D) > T(RR''D) - T(RR''R') = T(RR'D).$$ 1 pont

Ezzel igazoltuk, hogy a $PRQS$ négyszög területe pontosan akkor maximális, ha

$$\frac{DP}{PC} = \frac{AQ}{QB}.$$

Összesen: 7 pont

II. megoldás. (*Homonnay Bálint* dolgozata alapján.)



6. ábra

Az *ábra* jelöléseit használjuk.

A DCQ háromszög területe nem függ Q helyzetétől, hiszen DC és a DC-hez tartozó magasság nem változik. Emiatt T_{RQSP} akkor lesz maximális, ha a DRP és PSC háromszögek területének összege minimális. Az előző megoldásban használt hasonlóságok alapján

$$T_{DRP} + T_{PSC} = \frac{a \cdot \dfrac{m \cdot a}{a+c}}{2} + \frac{b \cdot \dfrac{m \cdot b}{b+d}}{2} = $$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \right),$$

ahol m a trapéz magassága, tehát állandó.

A zárójelben lévő kifejezés minimumát a *Titu-lemma* segítségével adjuk meg.

Titu-lemma. *Ha x és y pozitív, akkor*

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqq \frac{(a+b)^2}{x+y},$$

és egyenlőség csak $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ esetben teljesül.

A lemmát beszorzással és teljes négyzetté alakítással könnyen igazolhatjuk, vagy észrevehetjük, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség speciális esete az $\left(a/\sqrt{x}, b/\sqrt{y}\right)$ és $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}\right)$ számpárokra.

Visszatérve a feladatra:

$$\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \geqq \frac{(a+b)^2}{a+c+b+d}.$$

A jobb oldal állandó (a nevezőben a két alap hosszának összege jelent meg), és $a/c = b/d$ esetén meg is kapható ez az érték.

Tehát a vizsgált négyszög területe akkor maximális, ha $DP/AQ = PC/QB$.