Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív szám, amelynek a 10-es számrendszerbeli alakja 28-ra végződik, és számjegyeinek összege 28?

Megoldás. A keresett szám $100A + 28$ alakú. A feltételek miatt $100A$ is osztható 28-cal, ezért A osztható 7-tel. 2 pont

Az A szám jegyeinek összege $28 - (2 + 8) = 18$, így az A szám osztható 9-cel. 2 pont

Ezért az A szám osztható 63-mal. 1 pont

63 többszörösei: 63, 126, 189 stb. Közülük a legkisebb, amelyben a számjegyek összege 18, a 189. Így a keresett szám: 18 928, és ez megfelel a feltételeknek. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8) = 120.$$

Megoldás. A tényezők sorrendjét felcserélve alakítsuk át a kifejezést:

$$(x-5)(x-8)\cdot(x-6)(x-7) = 120.$$

Szorozzuk össze az első kettő tényezőt, majd a második kettőt:

$$\left(x^2-13x+40\right)\left(x^2-13x+42\right) = 120.$$ 1 pont

Vezessük be az $A = x^2 - 13x + 40$ új ismeretlent. 1 pont

Így az egyenletünk az alábbi másodfokú egyenletté alakul:

$$A\cdot(A+2) = 120,$$

$$A^2 + 2A - 120 = 0,$$ 1 pont

melynek megoldásai:

$$A_1 = 10,$$

$$A_2 = -12.$$ 1 pont

Az $A_1 = 10 = x^2 - 13x + 40$ másodfokú egyenlet megoldásai az $x_1 = 10$ és az $x_2 = 3$. 1 pont

Az $A_2 = -12 = x^2 - 13x + 40$ másodfokú egyenletnek nincsenek valós megoldásai, mivel a diszkriminánsa negatív. 1 pont

Azaz az eredeti egyenletünknek csak két megoldása van: $x_1 = 10,\ \ x_2 = 3$. 1 pont

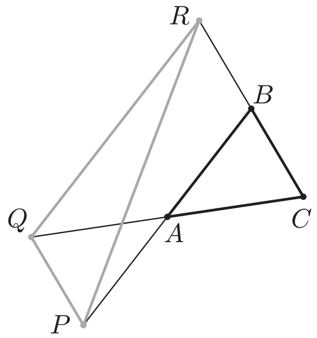
---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha észreveszi, hogy $120 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ és így kapja meg az $x_1 = 10$ megoldást, akkor az 2 pont. Ha észreveszi továbbá, hogy $120 = (-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2)$ és így az $x_2 = 3$ megoldást is megkapja, de nem bizonyítja, hogy több megoldás nincs, akkor azért legfeljebb még további 2 pont adható.

3. Az ABC háromszög AB oldalának A-n túli meghosszabbításán felvettük a P pontot, a BC oldal B-n túli meghosszabbításán az R pontot, végül az AC oldal A-n túli meghosszabbításán a Q pontot úgy, hogy $AP = AB$, $CB = BR$ és $CA = AQ$. Mennyi a PQR háromszög területe, ha az ABC háromszögé 100 cm^2?

Megoldás.



Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján! 1 pont

A feltételek miatt AB a QCR háromszög középvonala, ezért $QR \parallel AB$ és $QR = 2AB$. 2 pont

Szintén a feltételek miatt QP a CB szakasz A-ra vonatkozó tükörképe, tehát a QP és CB szakaszok párhuzamosak és egyenlő a hosszuk. 1 pont

Azt kaptuk, hogy $PBRQ$ paralelogramma és ezek szerint a PQR háromszög területe fele a paralelogramma területének. 1 pont

Végül a középvonalra vonatkozó korábbi észrevételünk alapján $QR = 2AB$ és a paralelogramma QR-hez tartozó magassága egyenlő az ABC háromszög A-hoz tartozó magasságával, vagyis $T_{PBRQ} = 4 \cdot T_{ABC}$. Ebből $T_{PQR} = 2 \cdot T_{ABC} = 200\ \text{cm}^2$ következik. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Osztható-e 81-gyel a 81 darab egyesből álló szám?

1. megoldás. A számjegyek összege osztható 9-cel, így az eredeti szám is osztható 9-cel. 1 pont

Osszuk el a számot 9-cel:

$$1111111111\ldots11 : 9 = 012345679012345679\ldots012345679. \qquad \text{2 pont}$$

A hányados biztosan osztható 9-cel, 1 pont
mivel egy kilenc számjegyből álló szám ismétlődik, amelyben minden számjegy kilencszer fordul elő.
Vagy: $9 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9) = 333$, ami osztható kilenccel. 2 pont

Az eredeti számot egy olyan szorzatként írtuk fel, amelynek mindkét tényezője osztható 9-cel, így az eredeti szám osztható $9 \cdot 9 = 81$-gyel. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A számjegyek összege osztható 9-cel, így az eredeti szám is osztható 9-cel. 1 pont

Az eredeti számot felírhatjuk a következő alakban:

$$111111111\underbrace{000\ldots0}_{72 \text{ db}} + 111111111\underbrace{000\ldots0}_{63 \text{ db}} + \ldots + 111111111000000000 + 111111111. \qquad 1 \text{ pont}$$

Ebből a számból kiemelhetjük a 111111111 számot: 1 pont

$$111111111 \cdot \left(10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^{9} + 1\right) = \qquad 1 \text{ pont}$$

$$= 111111111 \cdot 1000000001000000001\ldots1, \qquad 1 \text{ pont}$$

a második szorzótényezőben 9 db 1-es van, számjegyeinek összege 9, így osztható kilenccel. 1 pont

Mivel mind a két szorzótényező osztható 9-cel, így az eredeti szám osztható $9 \cdot 9 = 81$-gyel. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy 2013×2013 méretű táblázat minden mezőjébe az 1-től 2013-ig terjedő egész számok valamelyikét írtuk be úgy, hogy semelyik sorba nem kerültek egyenlő számok, és a táblázat szimmetrikus lett az egyik átlójára. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ebben az átlóban sem fordulnak elő egyenlő számok.

Megoldás. A feltételekből következik, hogy minden számot minden sorban pontosan egyszer, így összesen 2013-szor írtunk le. 1 pont

A táblázat szimmetriájából következik, hogy a szóban forgó átlón kívül eső mezőkben együttvéve minden szám páros sokszor fordul elő. 3 pont

Így ebben az átlóban a 2013 szám mindegyike páratlan sokszor, tehát legalább egyszer szerepel. 2 pont

Mivel 2013 mező van az átlóban, egyikük sem fordulhat elő egynél többször. Ezzel az állítást bizonyítottuk. 1 pont

Összesen: 7 pont