Haladók II. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adjunk meg a síkban 7 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 között mindig legyen 3 olyan, hogy azok, mint csúcsok derékszögű háromszöget határozzanak meg.

2. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $A_n = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ számnak legalább n különböző prímosztója van.

3. Mennyi az $f(x) = x^{2014} + 2x^{2013} + 3x^{2012} + \ldots + 2013x^2 + 2014x + 2015$ függvény legkisebb értéke?

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjunk meg a síkban 7 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 között mindig legyen 3 olyan, hogy azok, mint csúcsok derékszögű háromszöget határozzanak meg.

Megoldás. Válasszuk egy négyzet csúcsait, középpontját, valamint a négyzet köré írt kör, a négyzet átlóitól különböző átmérőjének két végpontját (jó konstrukció). 3 pont

Indoklás: Ha a 4 pont között valamely átmérő két végpontja is szerepel, akkor a körvonalról van még legalább egy pont (Thalész). 2 pont

Ha egyik átmérőnek sincs két végpontja a 4 pont között, akkor az átmérőkről legfeljebb 3 pont választható, melyek közül az egyik a négyzet oldala, így ez a negyedik pontként választott középponttal derékszögű háromszöget alkot. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $A_n = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ számnak legalább n különböző prímosztója van.

Megoldás. $A_1 = 2^2 + 2^1 + 1 = 7$ és $A_2 = 2^4 + 2^2 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$. Tehát $n = 1$ és $n = 2$ esetén igaz az állítás. 1 pont

Legyen most $n > 1$, és tegyük fel, hogy n-ig igaz a feladat állítása. Bevezetve az $x = 2^{2^{n-1}}$ jelölést, $A_{n+1} = x^4 + x^2 + 1$. 2 pont

Az ismert algebrai átalakítással

$$x^4 + x^2 + 1 = \big(x^2 + 1\big)^2 - x^2 = \big(x^2 - x + 1\big) \cdot \big(x^2 + x + 1\big).$$ 1 pont

Visszaírva az x-nek megfelelő kettőhatványt:

$$A_{n+1} = \big(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\big) \cdot \big(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1\big) = \big(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1\big) \cdot A_n.$$ 1 pont

A két zárójelben álló tényező páratlan, és különbségük $2 \cdot 2^{2^{n-1}}$ kettőhatvány, tehát relatív prímek, hiszen a legnagyobb közös osztó a különbségnek is osztója. 1 pont

Az első tényező 1-nél nagyobb, és relatív prím a másodikhoz, amiről tudjuk, hogy van legalább n különböző prímosztója. Az első tényező ad még legalább egy „új” prímtényezőt, ezzel beláttuk, hogy A_{n+1}-nek legalább $n + 1$ különböző prímosztója van. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Mennyi az $f(x) = x^{2014} + 2x^{2013} + 3x^{2012} + \ldots + 2013x^2 + 2014x + 2015$ függvény legkisebb értéke?

Megoldás. A páratlan együtthatójú tagokat bontsuk két részre az alábbi módon:

$$(2n+1)x^k = nx^k + (n+1)x^k. \qquad \text{1 pont}$$

Ezzel a függvény az

$$f(x) = x^{2014} + 2x^{2013} + \left(x^{2012} + 2x^{2012}\right) + 4x^{2011} + \left(2x^{2010} + 3x^{2010}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(1006x^2 + 1007x^2\right) + 2014x + (1007 + 1008)$$

alakra hozható. 1 pont

Alakítsuk át a kifejezést: az egymást követő tagokat csoportosítsuk hármasával, majd az egyes csoportokból emeljünk ki.

$$f(x) = \left(x^{2014} + 2x^{2013} + x^{2012}\right) + 2\left(x^{2012} + 2x^{2011} + x^{2010}\right) + \ldots$$
$$\ldots + 1007\left(x^2 + 2x + 1\right) + 1008. \qquad \text{2 pont}$$

A zárójelekben levő kifejezések mind egyenlők egy-egy kéttagú összeg négyzetével, vagyis

$$f(x) = \left(x^{1007} + x^{1006}\right)^2 + 2\left(x^{1006} + x^{1005}\right)^2 + \ldots + 1007(x+1)^2 + 1008. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel egy valós szám négyzete nemnegatív, a zárójeles tagok legkisebb értéke 0.

Az $x^k + x^{k-1} = 0$, $k \geqq 2$ egyenletből $x = 0$, vagy (az egyenlet x^{k-1}-nel való osztása után) $x = -1$, következik, de az utolsó négyzetes tag ezek közül csak $x = -1$ esetén lesz 0. 1 pont

Ezeken a tagokon kívül változó nem szerepel a kifejezésben, ami módosítaná a minimumhelyet, így a függvény legkisebb értéke $f(-1) = 1008$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont