Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Legyenek a, b, c és d olyan valós számok, amelyekre $ab = 1$ és $ac + bd = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $cd \leqq 1$.

2. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen 10 fő volt jelen. A bizottság bármelyik 2 tagja legfeljebb egy ülésen volt együtt. Bizonyítsuk be, hogy a bizottság legalább 64 tagból áll!

3. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

$$p + 1 = 2x^2, \tag{1}$$

$$p^2 + 1 = 2y^2. \tag{2}$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

4. Legyen a P pont az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának tetszőleges pontja. A P pont merőleges vetülete AC-n az R, BC-n a Q pont. Bizonyítsuk be, hogy

$a)$ Az RQ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át;

$b)$ P-ből az RQ szakaszra bocsátott merőlegesek is egy ponton mennek át!

5. Egy $n \times n$-es tábla egyik mezőjén áll egy bábu. Egy lépésben mozoghatunk egyet fel, vagy egyet jobbra, vagy átlósan balra lefele egyet. Lehetséges-e, hogy a táblát úgy járjuk be, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és végül a kiindulási mezőtől eggyel jobbra érkezünk meg?