

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2013/2014-es tanév**  
**2. (döntő) forduló**  
**haladók III. kategória**

**Feladatok**

1. Az  $(x, y, z)$  számhármadról tudjuk, hogy nincs közös osztójuk, és  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $x \cdot y \cdot z$  négyzetszám!

2. Az  $O_1$  középpontú  $k_1$  és az  $O_2$  középpontú  $k_2$  körök  $A$ -ban és  $B$ -ben metszik egymást. Az  $A$ -n átmenő közös szelőjük a köröket még  $C$  és  $D$  pontokban is metszi. ( $C$   $k_1$ -en,  $D$   $k_2$ -n van.) A  $CO_1$  és  $DO_2$  egyenesek metszéspontja  $M$ . Igazoljuk, hogy  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $M$  és  $B$  egy körön vannak.

3. Egy  $A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$  halmaz *súlyán* a benne lévő számok szorzatát értjük.

(Vagyis pl. az  $A = \{2; 3; 5\}$  halmaz súlya:  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ .)

Tekintsük a  $H = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{2014} \right\}$  halmazt! Mennyi  $H$  összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege?

(Ez pl. az  $A = \{2; 3; 5\}$  halmaznál  $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$  lenne.)