Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott az alábbi két egyenletrendszer:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1)+2y=1, \\ \text{II.} & b(x-1)+cy=3; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \text{I.} & a(x-1)+2y=1, \\ \text{II.} & b|x-1|+cy=3. \end{cases}$$

Tudjuk, hogy az első egyenletrendszernek nincs megoldása, a második egyenletrendszert viszont kielégíti a $\left(\frac{3}{4};\frac{5}{8}\right)$ számpár. Határozza meg az a, b, c paraméterek értékét!

Megoldás. A megoldást a második egyenletrendszer első egyenletébe helyettesítve:

$$-\frac{1}{4}a+\frac{5}{4}=1,$$

$$a=1. \qquad \text{1 pont}$$

A második egyenletrendszer második egyenletéből a

$$(1) \qquad 2b+5c=24$$

összefüggéshez jutunk. 1 pont

Az $a=1$ összefüggést felhasználva az első egyenletrendszer első egyenletében az

$$(2) \qquad x=2-2y$$

összefüggést kapjuk. 1 pont

A (2) összefüggést behelyettesítve az első egyenletrendszer második egyenletébe:

$$b(2-2y)+cy=3. \qquad \text{1 pont}$$

Felhasználva az (1) összefüggést ebből:

$$(24-5c)(1-y)+cy=3$$
$$(6c-24)y=5c+3. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenletnek pontosan akkor nincs megoldása, ha $c=4$, ekkor (1)-ből $b=2$. 1 pont

Az $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ értékek valóban kielégítik a feladat feltételeit. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Hányféle módon lehet felmenni egy 25 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha mindig csak 2-t vagy 3-at lépünk? (Más esetnek tekintjük azt, ha az alján lépünk 3-at, utána mindig 2-t, vagy az elejétől kettesével lépünk és a végén 3-at.)

Megoldás. Jelölje x, hányszor lépünk 2-t, y, hogy hányszor lépünk 3-at. Ekkor teljesülnie kell, hogy $2x + 3y = 25$. 1 pont.

Mivel $2x$ biztosan páros, $3y$ páratlan és így y is páratlan. A lehetséges értékek: $y = 1$, 3, 5 vagy 7. Az ezekhez tartozó x-ek: 11, 8, 5 és 2. 2 pont.

Ha $y = 1$ és $x = 11$, akkor összesen 12 lépés van, ebből 11 egyforma (2 lépcsőfok), azaz a lehetőségek száma = 12. 1 pont

A többi esetben 11, 10 illetve 9 lépés kell, ahol 3 és 8, 5 és 5 illetve 7 és 2 lépés egyformának tekinthető. Az egyes lehetőségek száma: 165, 252 és 36. 2 pont

Az összes lehetőség: $12 + 165 + 252 + 36 = 465$.

Összesen: 7 pont

3. Jelöljön x, y, z olyan pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $2xy^2 = 3z^3$. Mennyi az xyz szorzat minimuma?

1. megoldás. Mivel az egyenlet bal oldala osztható 2-vel, ezért a jobb oldal is osztható 2-vel. Ebből következik, hogy z osztható 2-vel. 1 pont

Mivel a jobb oldal osztható 3-mal, ezért a bal oldal is. Azaz x vagy y osztható 3-mal. 1 pont

Ezek alapján az xyz szorzat osztható 6-tal. 1 pont

Az xyz szorzat legkisebb lehetséges értéke a 6, nézzük először ezt. Az oszthatóságokat figyelembe véve két számhármas lehetséges: $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ vagy $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$. 1 pont

Egyik számhármas sem megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

Vizsgáljuk $xyz = 12$-t. Az oszthatóságokat figyelembe véve található olyan számhármas, ami megoldása az eredeti egyenletnek: $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$. A kérdéses minimum tehát 12. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Írjuk fel x-et, y-t, z-t kanonikus alakban. Ha x vagy y vagy z osztható 2-től és 3-tól különböző prímmel, akkor az egyenlet mindkét oldala ezt a prímet ugyanakkora kitevőn tartalmazza, és ezzel a prímhatvánnyal osztva az egyenlet szerkezete nem változik, továbbra is $2xy^2 = 3z^3$ alakú, de az xyz csökkent, tehát a minimumot elég olyan xyz esetén keresni, melyek kanonikus felbontásában csak a 2 vagy 3 szerepelhet, azaz $x = 2^a \cdot 3^b$, $y = 2^c \cdot 3^d$, $z = 2^e \cdot 3^f$, a kitevők természetes számok. 1 pont

A két oldalon a 2 és 3 kitevőinek egyenlőségét felírva a következő két független egyenletet kapjuk.

$$\begin{aligned} 1+a+2c &= 3e \\ b+2d &= 1+3f. \end{aligned}$$ 1 pont

$xyz = 2^{a+c+e} \cdot 3^{b+d+f}$, tehát $a+c+e$ és $b+d+f$ minimumát keressük.

Az első egyenletből látható, hogy e legalább 1. $e=1$ esetén $a=0$, $c=1$ vagy $a=2$, $c=0$, az első esetben $a+c+e$ kisebb. 1 pont

A másodikból $f=0$ esetén $b=1$, $d=0$. 1 pont

$e>1$ esetén $a+2c \geqq 5$, $(a+c)+c \geqq 5$, ahonnan $a+c \geqq 3$, ilyenkor $a+c+e \geqq 5$. 1 pont

$f>0$ esetén $b+2d \geqq 4$, $(b+d)+d \geqq 4$, tehát $b+d \geqq 2$, ekkor $b+d+f \geqq 3$. 1 pont

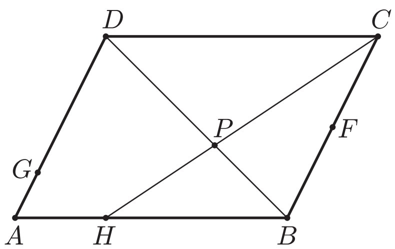
Ezek nagyobbak, mint az előbb kapott $a+c+e=2$ és $b+d+f=1$, tehát a minimális érték $xyz = 2^2 \cdot 3^1 = 12$ ($x=3$, $y=2$, $z=2$). 1 pont

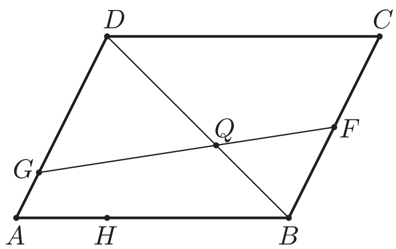
Összesen: 7 pont

4. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja H, BC oldalának felezőpontja F, és DA oldalának A-hoz legközelebb levő negyedelő pontja G. Bizonyítandó, hogy FG, CH és DB egy ponton mennek át!

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy GF és CH ugyanabban a pontban metszi a DB átlót. 1 pont

Jelölje P a CH és DB metszéspontját, Q pedig a GF és DB metszéspontját.





A HBP és a CDP háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt

$$\frac{BP}{PD} = \frac{BH}{DC} = \frac{2}{3}.$$ 2 pont

Az FQB és a GQD háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt

$$\frac{BQ}{QD} = \frac{BF}{DG} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$ 2 pont

Azt kaptuk, hogy $\frac{BP}{PD} = \frac{2}{3} = \frac{BQ}{QD}$, ez pedig csak úgy lehetséges, ha $P = Q$. Tehát FG, CH és DB egy ponton mennek át. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. Két szám szorzata $a \cdot b = -1$. Ugyanezen két szám összege $a + b = 1$. Bizonyítsd be, hogy az $S = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + b^4 + \ldots + a^8 + b^8$ kifejezés egy egész szám, és add meg a pontos értékét!

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy van két olyan a, b szám, amelyik kielégíti a feladat feltételeit.

Ehhez kifejezzük b-t $b = 1 - a$ alakban, majd beírjuk a másik feltételbe:

$$a(1-a) = -1 \longrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \longrightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vagyis pl. (ha $a > b$) $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kielégítik a két feltételt. 1 pont

Innen sokféleképp folytatható a feladat. (A megjegyzésben pár lehetséges folytatást leírunk majd.) A fennmaradó rész jó megoldása még 6 pontot ér!

Legyen $s_1 = a^1 + b^1 = a + b = 1$, $s_2 = a^2 + b^2$, $\ldots$, $s_n = a^n + b^n$.

Ezzel a jelöléssel $S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_8$ a kérdés.

$$s_2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 3. \qquad \text{1 pont}$$

Másfelől tekintsük a következő egyenlőséget: $(n > 1)$.

$$s_n = a^n + b^n = 1 \cdot (a^n + b^n) = (a+b) \cdot (a^n + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot b \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right).$$

Vagyis $s_n = a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot b \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right) = s_{n+1} - s_{n-1}$, innen $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$ adódik. 3 pont

Innen $s_1 = 1$; $s_2 = 3 \to s_3 = 4 \to s_4 = 7 \to s_5 = 11 \to s_6 = 18 \to s_7 = 29 \to s_8 = 47$.

Vagyis $= 1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 = 120$. 2 pont

Vagyis $S = 120$.

Összesen: 7 pont

Megjegyzések: $a)$ Egy lehetséges „csúnya” megoldás: Használjuk a véges mértani sorozat összegképletét! Ezzel

$$S = \left(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^8\right) + \left(1 + b + \ldots + b^8\right) - 2 = \frac{1-a^9}{1-a} + \frac{1-b^9}{1-b} - 2,$$

vagyis

$$S=\frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-2=\frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-2.$$

Innen a törteket bővítve a nevezők konjugáltjaival:

$$S=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}-2=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}-3$$

adódik.

Ezután kétszer alkalmazva a binomiális tételt a két 10-edik hatványra, és észrevéve, hogy a felbontás után az első tag számlálójában fennálló „páratlan” tagok éppen a második tag megfelelő „páratlan” tagjainak az ellentettjei és így ezek öszege: 0, míg a „páros” tagok közösek, adódik, hogy:

$$S=\frac{2\cdot\left(1^2+\binom{10}{2}\cdot 1^8\cdot 5+\binom{10}{4}\cdot 1^6\cdot 5^2+\binom{10}{6}\cdot 1^4\cdot 5^3+\binom{10}{8}\cdot 1^2\cdot 5^4+5^5\right)}{2^{10}}-3,$$

innen

$$S=\frac{1+45\cdot 5+210\cdot 25+210\cdot 125+45\cdot 625+3125}{2^9}-3,$$

$$S=\frac{3126+45\cdot 630+210\cdot 150}{2^9}-3=\frac{62976}{512}-3=123-3=120.$$

$a')$ a-ból következik, hogy $s_1+s_2+\ldots+s_n=s_{n+2}-3$.

$b)$ Természetesen külön-külön mindegyik s_i is megkapható két-két binomiális tétellel az iménti megjegyzéshez hasonlóan, de az még több számolást igényel!

$c)$ Az általunk s_n-nek nevezett sorozat a matematikában Lucas-sorozatként ismert.

A Lucas-sorozat nem rekurzív definíciójában $s_n=L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ megjelenik az aranymetszés száma.

Minden Fibonacci-szerű sorozat ($f_1=a$; $f_2=b$; $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$) kifejezhető a Lucas-sorozat tagjai segítségével, és így az aranymetszés számaival is!