Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az egyenletet a valós $(x;y)$ számpárok halmazán!

$$4-x^2-2\sqrt{9-x^2}=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|-6.$$

Megoldás. A $\sqrt{}$ alatt álló kifejezés nemnegatív, így $|x| \leqq 3$.

Rendezzük át az egyenletet!

Mindkét oldalhoz 6-ot adva:

$$10-x^2-2\sqrt{9-x^2}=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|,$$

$$\left(9-x^2\right)-2\sqrt{9-x^2}+1=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right|. \qquad \text{1 pont}$$

Ismerjük fel, hogy a bal oldalon a $\sqrt{9-x^2}-1$ kifejezés négyzete szerepel!

Vagyis az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)^2=-\left|\frac{y+3}{2y-1}-1\right| \qquad \text{2 pont}$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, a jobboldal pedig nempozitív, ezért egyenlőek csak úgy lehetnek, ha külön-külön mindkettő 0-val egyenlő! 1 pont

Megoldva a $\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)^2=0$ egyenletet:

$$\sqrt{9-x^2}=1 \quad\longrightarrow\quad 9-x^2=1 \quad\longrightarrow\quad 8=x^2 \quad\longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{8}$$

adódik.

És ez megfelel a $|x| \leqq 3$ feltételnek. 1 pont

Megoldva a $0 = -\left|\dfrac{y+3}{2y-1} - 1\right|$ egyenletet:

$$\frac{y+3}{2y-1} - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{y+3}{2y-1} = 1 \quad \longrightarrow \quad y+3 = 2y-1 \quad \longrightarrow \quad y = 4$$

adódik. 1 pont

Vagyis az egyenlet megoldása az alábbi két $(x;y)$ számpár: $\left(\sqrt{8};4\right)$ és $\left(-\sqrt{8};4\right)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Hány olyan konvex sokszög van, amelynek három egymást követő csúcsa $A(5;0)$, $B(5;5)$ és $C(0;5)$ koordinátájú pont, és a többi csúcsának koordinátái is nemnegatív egész számok?

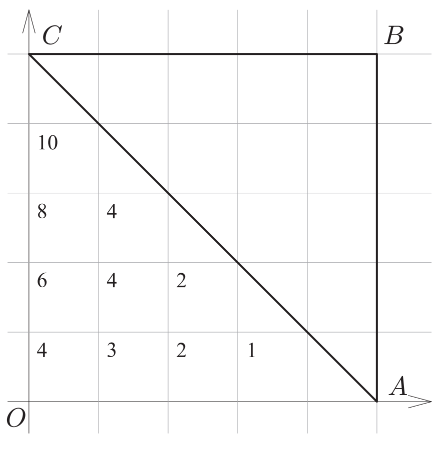
Megoldás. Háromszög 1 van.

Négyszög negyedik csúcsa olyan rácspont lehet, amely az ACO háromszög belsejében (O a koordináta-rendszer origója), vagy az OA, illetve OC oldalon van. Az ilyen pontok száma 15, így ennyi négyszög van. 1 pont)

Ötszögnél a 4. D csúcs helyét rögzítsük először, az ötödik csúcs lehetséges helyzeteinek számát D helyének megfelelő rácspontra írtuk. (A $D(3;1)$ pont után már csak a $(4;0)$ ponttal kapunk konvex ötszöget, ezért a $(4;0)$ pontra 1-et írtunk.) Összesen

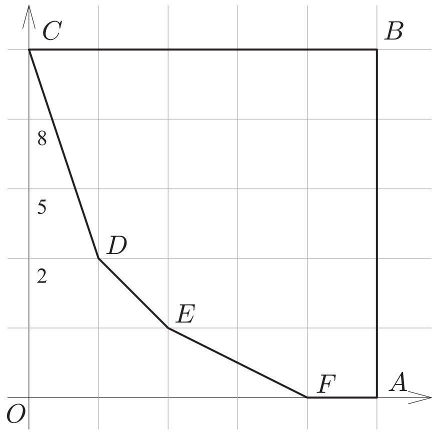
$$10+8+4+6+4+2+4+3+2+1=44$$

ötszög lehetséges. 2 pont

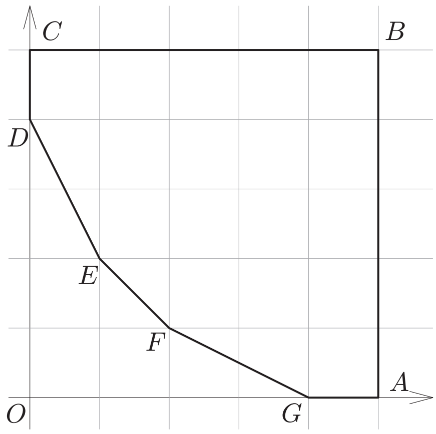


Hasonló módon számolhatjuk össze a hatszögeket. Itt a lehetőségek száma

$$8 + 5 + 2 + 1 = 16. \qquad \text{1 pont}$$



Hétszögből 1 van: 1 pont



Több csúcsú sokszög nem lehet, mert akkor az A, B és C csúcsokon kívüli legalább 5 csúcspontból vagy legalább 2-nek megegyezik az első vagy második koordinátája és így a sokszög konkáv vagy három csúcs egy egyenesre esik. 1 pont

Így az összes lehetséges sokszög száma: $1 + 15 + 44 + 16 + 1 = 77$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Az egyes esetek számának bármely helyes (akár csak rajzzal indokolt) megállapításáért jár a megfelelő pontszám.

3. Milyen pozitív egész n-re lesz a $2^8 + 2^{11} + 2^n$ négyzetszám?

Megoldás. Legyen $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$, ahol a pozitív egész.

Átalakítva a bal oldali összeget kapjuk, hogy

$$2^8 + 2^{11} = 2^8\left(1 + 2^3\right) = 2^8 \cdot 9 = 2^8 \cdot 3^2 = \left(2^4 \cdot 3\right)^2 = 48^2,$$

így $48^2 + 2^n = a^2$. 1 pont

Rendezve és szorzattá alakítva

$$2^n = \left(a^2 - 48^2\right),$$

$$2^n = (a - 48)(a + 48).$$ 1 pont

A bal oldalon kettő-hatvány áll, a jobb oldalon egy szorzat. Az $a - 48 = 1$ vagy $a + 48 = 1$ nem vezet megoldásra.

Így a jobb oldalon a két tényező egy-egy kettő-hatvánnyal egyezik meg. Legyen

$$a + 48 = 2^k, \quad a - 48 = 2^{n-k},$$

ahol k egy n-nél kisebb pozitív egész, és $k > n - k$. 1 pont

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$96 = 2^k - 2^{n-k} = 2^{n-k}\left(2^{2k-n} - 1\right),$$

ahol 2^{n-k} és $2^{2k-n} - 1$ pozitív egész,

$$3 \cdot 2^5 = 2^{n-k}\left(2^{2k-n} - 1\right).$$ 1 pont

A 2^{n-k} nem osztható 3-mal, így $\left(2^{2k-n} - 1\right)$ $3 \cdot 2^m$ alakú, ahol m nem negatív és ötnél nem nagyobb egész. Ekkor

$$2^{2k-n} = 3 \cdot 2^m + 1.$$

Mivel a jobb oldal egynél nagyobb, ezért a bal oldal is. Ekkor viszont a bal oldal páros. A jobb oldal pedig csak akkor lesz páros, ha $m = 0$. 1 pont

Tehát $2^{2k-n} - 1 = 3$, így $2k - n = 2$ és $2^{n-k} = 2^5$, azaz $n - k = 5$. 1 pont

A

$$2k - n = 2,$$

$$n - k = 5$$

egyenletrendszer megoldása $k = 7$ és $n = 12$.

$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 2^8\left(1 + 2^3 + 2^4\right) = 2^8 \cdot 25 = \left(2^4 \cdot 5\right)^2 = 80^2$ valóban négyzetszám. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, adja meg az átlók hosszának **pontos** értékét!

1. megoldás. Ha létezik ilyen rombusz, akkor az átlók felére és az oldalra felírt háromszög-egyenlőtlenség alapján $e/2 + f/2 > 2$, 1 pont
azaz $e + f > 4$, illetve $e < 4$, $f < 4$, azaz $e + f < 8$. 1 pont

Egész megoldás csak az 5, 6 vagy 7 lehet. 1 pont

Viszont az $e^2 + f^2 = 16$ egyenlőségnek is teljesülni kell az átlók merőlegessége miatt. 1 pont

Az egyenletrendszerek csak az $e + f = 5$ esetén adnak megoldást. 2 pont

Ekkor $e = \big(5 + \sqrt{7}\big)/2$, $f = \big(5 - \sqrt{7}\big)/2$, vagy fordítva. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az átlók merőlegessége miatt $e^2 + f^2 = 16$. 1 pont

Mivel $ef > 0$, ezért

$$16 = e^2 + f^2 < (e + f)^2 \leqq (e + f)^2 + (e - f)^2 = 2\big(e^2 + f^2\big) = 32.$$ 2 pont

16 és 32 között csak a 25 négyzetszám, azaz $e + f$ egyetlen lehetséges értéke 5. 2 pont

Az egyenletrendszer megoldása $e = \big(5 + \sqrt{7}\big)/2$, $f = \big(5 - \sqrt{7}\big)/2$, vagy fordítva. 2 pont

Összesen: 7 pont