Bolyai János
Matematikai Társulat

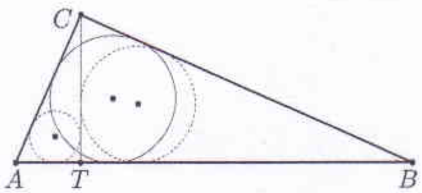
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
3. (döntő) forduló
Haladók II. kategória

Feladatok

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $a+b+c=1$, igaz a következő állítás:

$$\left(a+\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^4+\left(b+\frac{1}{4\sqrt{b}}\right)^4+\left(c+\frac{1}{4\sqrt{c}}\right)^4 \geqq 1.$$

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy A-nál és B-nél is hegyesszöge van. Ekkor állítsunk a C csúcsból merőlegest az AB oldalra, és jelölje a merőleges talppontját T! Legyen az ATC háromszögbe írt kör sugara r_a, a BTC háromszögbe írt kör sugara r_b, az ABC háromszögbe írt kör sugara r. Bizonyítsuk be, hogy ha $r+r_a+r_b=CT$, akkor a háromszögnek C-nél derékszöge van!



3. Kullancs kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan

- kétharmada félszemű;
- háromnegyede falábú;
- négyötöde kampókezű, és
- öthatoda kopasz.

A hajón a matrózok közül pontosan azok a tisztek, akik egyszerre félszeműek, falábúak, kampókezűek, és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, valamint a tisztek matrózoknak is számítanak!

Hány fős a kalózhajó legénysége?

Az eredményhirdetést 2015. május 20-án (szerdán) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).