

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2014/2015-ös tanév**  
**1. forduló**  
**Haladók III. kategória**

**Feladatok**

**1.** Egy háromszögben nevezzük *kerületfelezőnek* az olyan szakaszokat, amelyek a háromszög egy csúcsát úgy kötik össze a szemközti oldal egy pontjával, hogy a szakasz két oldalára a háromszög kerületének ugyanakkora része esik. Igaz-e, hogy ha egy háromszög nem egyenlő szárú, akkor kerületfelező szakaszai mind különböző hosszúságúak?

**2.** A másodfokú  $p(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) polinom minden  $x$ -re teljesíti az alábbi összefüggést:

$$p(x) = \left( \frac{p(x+1) - p(x-1)}{2} \right)^2.$$

Add meg a következő összeg pontos értékét!  $S = p(-3) - 2p(0) + p(3) = ?$

**3.** Megrajzoltuk egy konvex nyolcszög összes átlójának egyenesét, majd ezen egyenesek összes metszéspontját. Legfeljebb hány metszéspont eshet a nyolcszögön kívülre?

**4.** Melyik az a legkisebb (tízest számrendszerben felírt) természetes szám, amelyben mind a tízféle számjegy szerepel legalább egyszer, és a szám osztható 99-cel?

(A szám nem kezdődhet 0-val!)

**5.** Adott egy  $PQR$  háromszög, amelynek oldalai különböző hosszúak. Az  $MN$  szakasz ugyanazon oldalára felvettük a betűzésük sorrendjében azonos körüljárású  $MNA$ ,  $BMN$  és  $NCM$  háromszögeket, amelyek mind hasonló  $PQR$ -hez. Bizonyítsuk be, hogy az  $ABC$  háromszög is hasonló  $PQR$ -hez.