Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $abc = 1$, igaz a következő állítás:

$$\frac{a^9 + b^9}{a^6 + a^3b^3 + b^6} + \frac{b^9 + c^9}{b^6 + b^3c^3 + c^6} + \frac{c^9 + a^9}{c^6 + c^3a^3 + a^6} \geqq 2.$$

2. Egy 3×3-as táblázat mezőibe beírtuk az első kilenc pozitív egész számot pontosan egyszer úgy, hogy a három sorban (balról jobbra), a három oszlopban (felülről lefele) és a bal felső sarokból induló átlón kiolvasható háromjegyű számok mindegyike osztható 11-gyel. Mekkora lehet a jobb felső sarokból kiinduló átlón kiolvasható szám értéke?

3. Adott a síkban n darab vektor, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A vektorok abszolút értékeinek összege 1. Bizonyítsuk, hogy ezen vektorok halmazának van olyan nem üres részhalmaza, hogy a részhalmaz vektorai összegének abszolút értéke legalább $\frac{1}{6}$!

Megoldások és javítási útmutató

1. Mutassuk ki, hogy bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, ahol $abc=1$, igaz a következő állítás:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geqq 2.$$

1. megoldás.

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}=\frac{\left(a^3+b^3\right)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right)}{a^6+a^3b^3+b^6}=\left(a^3+b^3\right)-\frac{2a^3b^3\left(a^3+b^3\right)}{a^6+a^3b^3+b^6}. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel:

$$0 \leqq \left(a^3-b^3\right)^2,$$

$$0 \leqq a^6-2a^3b^3+b^6,$$

$$2a^3b^3 \leqq a^6+b^6,$$

$$3a^3b^3 \leqq a^6+a^3b^3+b^6,$$

$$\frac{a^3b^3}{a^6+a^3b^3+b^6} \leqq \frac{1}{3}, \qquad \text{1 pont}$$

$$\frac{2a^3b^3\left(a^3+b^3\right)}{a^6+a^3b^3+b^6} \leqq \frac{2\left(a^3+b^3\right)}{3},$$

$$\left(a^3+b^3\right)-\frac{2a^3b^3\left(a^3+b^3\right)}{a^6+a^3b^3+b^6} \geqq \left(a^3+b^3\right)-\frac{2\left(a^3+b^3\right)}{3},$$

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6} \geqq \frac{\left(a^3+b^3\right)}{3}. \qquad \text{1 pont}$$

Analóg:

$$\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6} \geqq \frac{\left(b^3+c^3\right)}{3} \qquad \text{és} \qquad \frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geqq \frac{\left(c^3+a^3\right)}{3}.$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geqq \frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{3}. \qquad \text{1 pont}$$

Felhasználva, hogy:

(1) a, b, c pozitív,

(2) $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=a^3+b^3+c^3-3abc$,

és

(3) $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+ac+bc$, 1 pont

arra a következtetésre jutunk, hogy $a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$. 1 pont

Így:

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geqq$$
$$\geqq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3} \geqq \frac{2\cdot 3abc}{3}=2abc=2,$$

amit bizonyítani kellett 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás (*több versenyző dolgozata alapján*).

Többen használták a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség *Titu-lemma* néven elhíresült alakját. Három tagra ez így néz ki:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

ahol a, b, c, x, y, z pozitív valós számok, és egyenlőség akkor teljesül, ha $a/x=b/y=c/z$.

A bizonyítandó egyenlőtlenség egyszerűbb alakba írható,ha bevezetjük az $a^3=A$, $b^3=B$, $c^3=C$ jelöléseket. Így $ABC=1$ is teljesül, és elég azt bizonyítani, hogy

$$\frac{A^3+B^3}{A^2+AB+B^2}+\frac{B^3+C^3}{B^2+BC+C^2}+\frac{C^3+A^3}{C^2+CA+A^2} \geqq 2.$$

Most kettébontjuk a törteket, és bővítünk, hogy a számlálók teljes négyzetté váljanak:

$$\frac{A^3}{A^2+AB+B^2}\cdot\frac{A}{A}+\frac{B^3}{A^2+AB+B^2}\cdot\frac{B}{B}+\frac{B^3}{B^2+BC+C^2}\cdot\frac{B}{B}$$
$$+\frac{C^3}{B^2+BC+C^2}\cdot\frac{C}{C}+\frac{C^3}{C^2+CA+A^2}\cdot\frac{C}{C}+\frac{A^3}{C^2+CA+A^2}\cdot\frac{A}{A} \geqq 2.$$

Két csoportra alkalmazva a Titu-lemmát:

$$\frac{A^4}{A^3+A^2B+AB^2}+\frac{B^4}{B^3+B^2C+BC^2}+\frac{C^4}{C^3+C^2A+CA^2}$$
$$\geqq \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2},$$

illetve

$$\frac{B^4}{A^2B+AB^2+B^3}+\frac{C^4}{B^2C+BC^2+C^3}+\frac{A^4}{C^2A+CA^2+A^3}$$
$$\geqq \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2}.$$

A két becslés összegéből

$$\text{baloldal} \geqq 2 \cdot \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2}$$

következik, ezért elegendő megmutatni, hogy

$$\frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2} \geqq 1.$$

A nevező szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned}&\frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^3+B^3+C^3+A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2}\\&=\frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}{A^2(A+B+C)+B^2(A+B+C)+C^2(A+B+C)}.\end{aligned}$$

Kiemelés és egyszerűsítés után

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C} \geqq 1$$

igazolandó. Végül ismét alkalmazzuk a Titu-lemmát, majd a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned}\frac{A^2+B^2+C^2}{A+B+C} &= \frac{A^2}{A+B+C}+\frac{B^2}{A+B+C}+\frac{C^2}{A+B+C}\\&\geqq \frac{(A+B+C)^2}{3(A+B+C)} = \frac{A+B+C}{3} \geqq \sqrt[3]{ABC} = 1.\end{aligned}$$

$a=b=c=1$ esetén minden becslésben egyenlőség áll.

2. Egy 3×3-as táblázat mezőibe beírtuk az első kilenc pozitív egész számot pontosan egyszer úgy, hogy a három sorban (balról jobbra), a három oszlopban (felülről lefele) és a bal felső sarokból induló átlón kiolvasható háromjegyű számok mindegyike osztható 11-gyel. Mekkora lehet a jobb felső sarokból kiinduló átlón kiolvasható szám értéke?

Megoldás.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

A táblázat mezőibe írt számokat jelöljük az ábra szerint $a, b, c, \ldots, i$ betűkkel.

Egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeinek váltakozó előjellel vett összege osztható 11-gyel.

A feladat feltétele szerint a három sorban kiolvasható számok oszthatók 11-gyel, vagyis teljesülnek a következő oszthatóságok:

$$\begin{aligned}&11 \mid a-b+c,\\ \text{(I)}\qquad &11 \mid d-e+f,\\ &11 \mid g-h+i.\end{aligned}$$

A középső oszlopban kiolvasható szám 11-gyel való oszthatósága miatt pedig

$$11 \mid b - e + h. \qquad \text{1 pont}$$

Vizsgáljuk az $(a - b + c) + (d - e + f) + (g - h + i) - 2(b - e + h)$ összeget. A fenti oszthatóságok miatt ennek az összegnek is osztója a 11, vagyis

$$\begin{aligned} 11 \mid (a - b + c) + (d - e + f) + (g - h + i) + 2(b - e + h) = \\ = (a + b + c + d + e + f + g + h + i) - 4e. \end{aligned} \qquad \text{1 pont}$$

Mivel az $a, b, c, \ldots, i$ számok az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokkal egyeznek meg valamilyen sorrendben, az $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ egyenlőség teljesül, tehát a fenti oszthatóság a

$$11 \mid 45 - 4e$$

alakba írható.

Mivel $1 \leqq e \leqq 9$, ezért $9 \leqq 45 - 4e \leqq 41$, e egész és $11 \mid 45 - 4e$, amiből $e = 3$ következik. 1 pont

A középső sorban, a középső oszlopban és a bal felső sarokból induló átlóban kiolvasható számok 11-gyel való oszthatósága miatt

$$11 \mid d - 3 + f,$$
$$11 \mid b - 3 + h,$$
$$11 \mid a - 3 + i.$$

Mivel ezen összegek nem lehetnek negatívak sem 14-nél nagyobbak (hisz két különböző számjegy összege legfeljebb 17), ezért a $d + f$, $b + h$ és $a + i$ összegek értéke 3 vagy 14 lehet. 1 pont

Nem lehet mindegyik érték 14, hisz a hat legnagyobb számjegy összege 39, ami kisebb $3 \cdot 14 = 42$-nél, tehát az egyik összeg értéke 3. Mivel csak a két legkisebb pozitív egész szám összege 3, a másik két összeg értéke biztosan 14, mely csak $5 + 9$ és $6 + 8$ alakban állhat elő. A két kimaradó számjegy a 4 és a 7, ezek lesznek c és g értékei, tehát a jobb felső sarokból induló átló átlóban kiolvasható szám a 437 és a 734 lehet. 2 pont

Ilyen kitöltések léteznek is, amint az ábrákon látható. 1 pont

2	9	7
6	3	8
4	5	1

1	5	4
8	3	6
7	9	2

Összesen: 7 pont

3. Adott a síkban n darab vektor, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A vektorok abszolút értékeinek összege 1. Bizonyítsuk, hogy ezen vektorok halmazának van olyan nem üres részhalmaza, hogy a részhalmaz vektorai összegének abszolút értéke legalább $\frac{1}{6}$!

1. megoldás. Mérjük fel a vektorokat egy O pontból. Az ebben az O pontban található $360°$-os szöget bontsuk fel 3 darab $120°$-ra. 1 pont

A skatulya-elv miatt van olyan szög, ahova eső vektorok hosszának összege legalább $1/3$ (a szögszárakra eső vektorokat besorolhatjuk a két szög bármelyikébe, akár mindkettőbe). 2 pont

Ennek a szögnek húzzuk be a szögfelezőjét, és minden ide a szögbe eső vektort bontsunk a szögfelezővel párhuzamos és rá merőleges komponensre. 1 pont

Egy vektor párhuzamos komponense akkor a legkisebb, ha a vektor $60°$-ot zár be a szögfelezővel. Ilyenkor ez a komponens feleakkora, mint a vektor. 1 pont

Ezért a párhuzamos komponensek összegének hossza legalább $1/6$. 1 pont

Merőleges komponenseket is figyelembe véve a vektorok összegének hossza nem csökkenhet, így az legalább $1/6$! 1 pont

Megjegyzés: Ha rögzítjük, hogy a két határoló szögszár közül csak az egyik tartozik a $120°$-os szöghöz, akkor az is adódik, hogy az összeg abszolút értéke több, mint $1/6$!

Összesen: 7 pont

2. megoldás (*több versenyző dolgozata alapján*).

Felveszünk egy tetszőleges koordináta-rendszert, amelyben a vektorok koordinátái $\underline{v}_i(x_i; y_i)$. Két egyszerű becslést használunk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i| + |y_i|\big) \leqq |\underline{v}_i| \leqq |x_i| + |y_i|.$$

Az alsó becslés a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség következménye:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i| + |y_i|\big) \leqq |\underline{v}_i| \Leftrightarrow \frac{|x_i| + |y_i|}{2} \leqq \sqrt{\frac{|x_i|^2 + |y_i|^2}{2}}.$$

A felső becslés pedig a háromszög-egyenlőtlenségből jön ki, hiszen $\underline{v}_i(x_i; y_i) = (x_i; 0) +$ $+ (0; y_i)$.

Most bontsuk négy csoportra a vektorokat aszerint, hogy melyik síknegyedbe esnek. (Felvehető úgy a két tengely, hogy semelyik vektor ne legyen párhuzamos egyik tengellyel sem.) Számoljuk ki minden csoportban a vektorok tengelyeken vett merőleges vetületeinek összhosszát. Biztos lesz olyan síknegyed, ahol a vetületek összhossza legalább $1/4$, hiszen a fenti felső becslés alapján a négy csoportban összesen legalább 1 a vetületek összhossza.

Azt is feltehetjük, hogy ez az I-es síknegyedben áll elő, tehát itt minden koordináta pozitív. (A tengelyek megfelelő forgatásával elérhető ez a helyzet.) Jelölje az I-es síknegyedbe eső vektorokat $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{4} \leqq \sum_{i=1}^{k}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i,$$

ahol az összegzés már csak a $\underline{w}_j$ vektorokra vonatkozik, és az abszolútértékek a síknegyed megválasztása miatt voltak elhagyhatók.

Végül a fenti alsó becslést használva:

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \underline{w}_j\right| = \left|\left(\sum_{j=1}^{k} x_j; \sum_{j=1}^{k} y_j\right)\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k} y_j\right) \geqq \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6}.$$

3. megoldás (*Baran Zsuzsa dolgozata alapján*).

A vektorok hosszának összegére vonatkozó feltételből és a háromszög-egyenlőtlenségből

$$1 = \sum_{i=1}^{n} |\underline{v}_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

Az utolsó két összeg valamelyike nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Feltehető, hogy $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqq \frac{1}{2}$.

Az x_i koordináták előjele szerint osszuk két csoportra a vektorokat. (A 0 mehet a pozitívak közé.) Az egyik csoportban $\sum |x_j| \geqq \frac{1}{4}$, hiszen összesen legalább $\frac{1}{2}$ az abszolútértékek összege. A folytatásban ezen csoport vektorait jelölje $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$. Tudjuk, hogy $k > 0$, mert nem nulla az összeg.

A csoportban minden x koordináta azonos előjelű, ezért

$$\sum |x_j| = \left|\sum x_j\right|.$$

Emiatt

$$\left|\sum \underline{w}_j\right| = \left|\left(\sum x_j; \sum y_j\right)\right| \geqq \left|\sum x_j\right| = \sum |x_j| \geqq \frac{1}{4}.$$

Az utolsó becslésnél azt használtuk, hogy egy vektor hossza legalább annyi, mint x koordinátája abszolútértéke.

4. megoldás (*Baran Zsuzsa és Williams Kada dolgozata alapján*).

Az eddigi megoldásokban egyre jobb alsó becsléseket adtunk a kiválasztható részhalmaz összegének hosszára $\big(1/6, 1/\big(4\sqrt{2}\big), 1/4\big)$. Természetesen adódik a következő kérdés:

> *Mi az a legnagyobb K valós szám, amire igaz, hogy ha n vektor hosszának összege 1, akkor kiválasztható közülük néhány, amelyek összegének hossza legalább K?*

Az éles becslés megsejtéséhez a következő gondolatkísérlet eredményeként juthatunk. Tegyük fel, hogy az n vektor egy szabályos n-szög oldalvektorai, és n „nagyon nagy”. Ekkor a sokszög egy egységnyi kerületű kört közelít, melynek átmérője $\frac{1}{\pi}$. Szemléletesen látszik, hogy a vektorok tetszőleges részhalmazának összege olyan vektort ad, amely nem hosszabb, mint a kör átmérője.

Megmutatjuk, hogy $K = \frac{1}{\pi}$ elérhető.

Az előző megoldásokban egy tetszőlegesen felvett koordináta-rendszerben dolgoztunk. Azzal tudjuk javítani az alsó becslésünket, ha megtaláljuk a *legjobb* koordináta-rendszert. Induljunk ki egy tetszőleges koordináta-rendszerből, ahol az i. vektor $\underline{v}_i(x_i; y_i)$. Most forgassuk körbe az X-tengelyt, és minden helyzetben számoljuk ki a vektorok X- és Y-irányú vetületét. Ha az eredeti rendszer X-tengelyének pozitív irányával $\underline{v}_i$ α, az elforgatott X-tengely pedig φ nagyságú szöget zár be, akkor a vektor merőleges vetületeinek összhossza az elforgatott rendszerre vonatkozóan:

$$V(\varphi, \underline{v}_i) = \big(\left|\sin(\alpha - \varphi)\right| + \left|\cos(\alpha - \varphi)\right|\big)|\underline{v}_i|.$$

A sin és cos periodicitása alapján:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi &= |\underline{v}_i| \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left|\sin(\alpha - \varphi)\right| \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \left|\cos(\alpha - \varphi)\right| \mathrm{d}\varphi\right) = \\
&= |\underline{v}_i| \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left|\sin(\varphi)\right| \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \left|\cos(\varphi)\right| \mathrm{d}\varphi\right) = \\
&= |\underline{v}_i| \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4|\underline{v}_i| \cdot \big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big) = 8|\underline{v}_i|.
\end{aligned}$$

Az összes vektorra összegezve:

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi = 8\left(\sum_{i=1}^{n} |\underline{v}_i|\right) = 8.$$

Emiatt létezik $\varphi \in [0; 2\pi]$, amelyre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(\varphi, \underline{v}_i) \geqq \frac{8}{2\pi}$, ellenkező esetben ugyanis $I \leqq 8$ adódna. Ezt a φ-t választjuk tehát, és a folytatásban már abban a koordináta-rendszerben dolgozunk, amit ez a szög kijelölt.

Innentől az előző megoldás működik, de most az $1 \leqq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ helyett az erősebb $\displaystyle\frac{8}{2\pi} \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ egyenlőtlenségből indulhatunk ki, ezért végül a kiválasztott $\underline{w}_j$ vektorokra a

$$\left|\sum \underline{w}_j\right| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

egyenlőtlenséget kapjuk meg.

A fenti gondolatkísérlet pontossá tehető, és megmutatható, hogy ennél nagyobb K már nem lehet jó.