Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2014/2015-ös tanév
I. forduló
Kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek néhány számjegyét a szám elejéről (ugyanabban a sorrendben) a szám végére helyezve visszakapható az eredeti szám? (Például az 1234 nem ilyen, mert a 2341, 3412, 4123 mind különböznek tőle.)

Megoldás. Először számoljuk meg, hány olyan van, amelynek az első számjegyét áthelyezve a szám végére visszakapjuk az eredeti számot. Az eredeti $\overline{abcd}$ szám pontosan akkor egyezik meg $\overline{bcda}$-val, ha $a = b = c = d$, azaz pontosan az $\overline{aaaa}$ alakú számok ilyenek, ahol a $(= b = c = d)$ bármelyik 0-tól különböző számjegy lehet, vagyis 9 ilyen szám van. 1 pont

Ha az első két számjegy áthelyezésével lehet visszakapni az eredeti számot, akkor az eredeti $\overline{abcd}$ szám megegyezik $\overline{cdab}$-vel, ami pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$. Az a $(= c)$ számjegy 9 féle lehet (bármi, kivéve a 0-t), a b $(= d)$ számjegy pedig 10 féle lehet, így összesen 90 ilyen szám van. 2 pont

Ezek közül 9-et viszont már számoltunk: az $\overline{aaaa}$ alakúakat, így csak 81 új számot kapunk. 1 pont

Végül, ha az $\overline{abcd}$ szám első három számjegyét áthelyezve kapható vissza az eredeti szám, akkor $\overline{abcd} = \overline{dabc}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c = d$, vagyis ismét csak az $\overline{aaaa}$ alakú számokat kapjuk meg, azaz nem kapunk új megoldást. 1 pont

Összesen tehát 90 ilyen szám van. 1 pont

2. Melyek azok a p, q pozitív prímszámok, melyekre $p^2 - 1$ osztható q-val, és $q^2 - 1$ osztható p-vel?

Megoldás. Mivel $q \mid p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, ezért $q \mid p - 1$ vagy $q \mid p + 1$, mindkét esetben $q \leqq p + 1$. 2 pont

Ugyanígy $p \leqq q + 1$ is teljesül. Vagyis a p és q prímszámok különbsége legfeljebb 1. 1 pont

Ha $p = q$ lenne, akkor $p \mid p^2 - 1$ alapján $p \mid 1$ következne, ami ellentmondás. 1 pont

Tehát p és q prímszámok különbsége pontosan 1, így az egyik szám 2, a másik pedig 3. 1 pont

Ez valóban megoldás, mivel $2 \mid 3^2 - 1 = 8$ és $3 \mid 2^2 - 1 = 3$. 1 pont

3. Hányféleképpen helyezhető el egy 8×8-as sakktáblán egy 5×5-ös négyzet úgy, hogy a kisebb négyzet csúcsai a sakktábla mezőinek valamely csúcsára essenek?

Megoldás. Ha a sakktábla éleivel párhuzamosak az 5×5-ös négyzet élei, akkor illesszük először a kicsi négyzetet a sakktábla bal felső sarkába. Ezt jobbra vagy lefelé legfeljebb 3 egységgel mozgathatjuk el, így $4 \cdot 4 = 16$ ilyen elrendezés van. 2 pont

Ha az 5×5-ös négyzet oldalai nem párhuzamosak a sakktábla oldalaival, akkor a 3, 4, 5 Pitagoraszi számhármas alapján négyszögünket egy 7×7-es négyzetbe illeszthetjük be az alábbiak szerint:

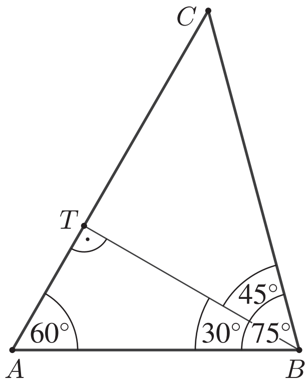
– a 7×7-es négyzet bal felső csúcsából elindulva az óramutató járásának megfelelő irányba egyik esetben 3, 4, másik esetben pedig 4, 3 egységekre osszuk fel az oldalakat. A kijelölt osztópontok adják az 5×5-ös négyzet csúcsait.

Az előzőek alapján a 7×7-es négyzetet $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen lehet a sakktáblán elhelyezni. Tehát $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ilyen elrendezés van. 3 pont

Azaz összesen $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$-féleképpen lehet az 5×5-ös négyzetet a feltételeknek megfelelően a sakktáblán elhelyezni. 1 pont

4. Egy háromszög egyik oldala 2 egység hosszúságú, a rajta fekvő szögek 60° és 75°-osak. Igazold, hogy a háromszög területe $t = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



Rajzoljuk be a 75°-os szöghöz tartozó B csúcsból induló magasságot, és legyen a talppontja a szemközti oldalon T! 1 pont

Ez a magasság a háromszöget két derékszögű háromszögre bontja.

Az ABT derékszögű háromszög egy „fél” szabályos háromszög, ezért $AT = \dfrac{AB}{2} = 1$ és $BT = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \sqrt{3}$. 2 pont

A BTC derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő szög nagysága $75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$, így ez egy egyenlőszárú derékszögű háromszög, azaz $TC = BT = \sqrt{3}$. 2 pont

Így a háromszög területe: $t = \dfrac{b \cdot m_b}{2} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$. 1 pont