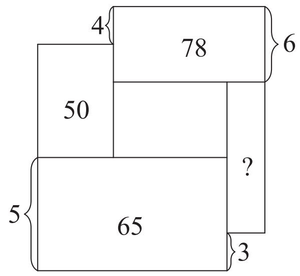
Bolyai János
Matematikai Társulat

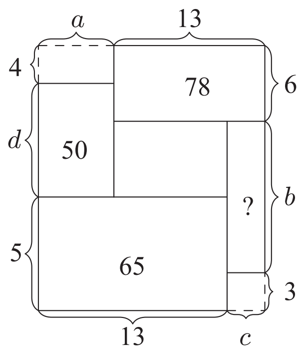
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Naoki Inaba japán matematikus rejtvényeiben bizonyos téglalapok területét és néhány szakasz hosszát ismerjük, és ez alapján kell egy másik területet vagy távolságot meghatároznunk. A képen látható fejtörőben a ?-lel jelölt területet kell kiszámolnunk. (Vigyázzunk, az ábra nem arányos!)



Megoldás.



Egészítsük ki az ábrát egy nagy téglalappá, és számoljuk ki a 78 és 65 egység területű téglalap vízszintes oldalának hosszát. 3 pont

Mivel a téglalap szemközti oldalai egyenlők, ezért $a + 13 = c + 13$ és $6 + b + 3 = 5 + d + 4$, vagyis $a = c$ és $b = d$. 2 pont

Az 50 egység területű téglalapból $ad = 50$, tehát $bc = da = 50$ is igaz. A keresett terület 50 egység. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az $x^3 - x + p = 0$ egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1!

Megoldás. Legyen a két gyök c és $c + 1$. Ha ezeket az egyenletbe behelyettesítjük, teljesül, hogy $c^3 - 7c + p = 0$ és $(c + 1)^3 - 7(c + 1) + p = 0$. 1 pont

A második egyenletből vonjuk ki az elsőt, közben végezzük el a köbre emelést:
a $3c^2 + 3c - 6 = 0$ egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek megoldásai: $c_1 = 1$ és $c_2 = -2$. 1 pont

Ezeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve a $p_1 = 6$ és a $p_2 = -6$ értékeket kapjuk. 1 pont

Az $x^3-7x+6=0$ egyenletbe az 1-t és a 2-t behelyettesítve, az $x^3-7x-6=0$ egyenletbe a -2-t és a -1-et behelyettesítve ellenőrizzük, hogy eredményünk jó. 2 pont

(Az ellenőrzés más módja is elfogadható, de az ellenőrzés igényének és módszerének egyértelműen meg kell jelennie.)

Összesen: 7 pont

3. A 2025-re igaz, hogy $2025=(20+25)^2$. Van-e még ilyen négyjegyű szám?

Megoldás. Keressük azokat a négyjegyű számokat, melyekre igaz, hogy $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2$. Legyen:

$$x=\overline{ab}=10a+b,$$
$$y=\overline{cd}=10c+d.$$ 1 pont

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\overline{abcd}=100x+y,$$
$$\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2=(x+y)^2.$$ 1 pont

A keresett számra vonatkozó egyenlőséget felírva, majd átalakítva:

$$100x+y=(x+y)^2,$$
$$99x=(x+y)^2-(x+y),$$
$$99x=(x+y)(x+y-1).$$ 1 pont

Vagyis két szomszédos egész szám szorzatának oszthatónak kell lennie 11-gyel és 9-cel úgy, hogy az x kétjegyű szám legyen. 1 pont

Ez három esetben teljesül: $45\cdot44$, $55\cdot54$ és $99\cdot98$ esetében. 1 pont

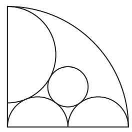
A többi esetben ($10\cdot11$, $11\cdot12$, $21\cdot22$, $22\cdot23$, $32\cdot33$, $33\cdot34$, $43\cdot44$, $55\cdot56$, $65\cdot66$, $66\cdot67$, $76\cdot77$, $77\cdot78$, $87\cdot88$, $88\cdot89$) nem teljesül a 9-cel való oszthatóság, a $99\cdot100$ után pedig az x háromjegyű. 1 pont

Tehát a keresett számok:

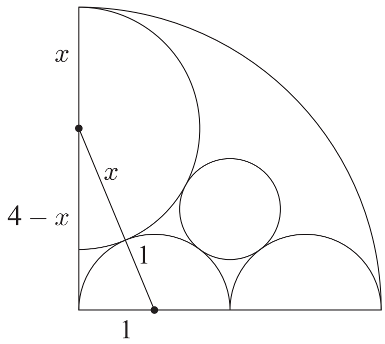
$$2025\quad(45\cdot44,\quad\text{ekkor}\quad x=20\quad\text{és}\quad y=25),$$
$$3025\quad(55\cdot54,\quad\text{ekkor}\quad x=30\quad\text{és}\quad y=25),$$
$$9801\quad(99\cdot98,\quad\text{ekkor}\quad x=98\quad\text{és}\quad y=01).$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy négy egység sugarú negyedkörbe félköröket írtunk az ábrán látható módon. A két kisebb félkör sugara egyenlő. Ezután megrajzoltuk azt a kört, ami mindhárom félkört érinti. Mekkora ennek a körnek a sugara?

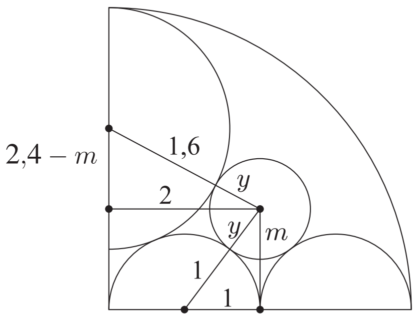


Megoldás.



A nagyobb félkör sugarát jelölje x. A középpontok összekötésével derékszögű háromszöget kapunk.

Felírva a Pitagorasz-tételt $(4-x)^2+1^2=(1+x)^2$, ahonnan $16-8x=2x$, tehát $x=1{,}6$. 2 pont



A kis kör középpontja legyen m távol az alsó sugártól, és a kis kör sugara legyen y.

A kis kör középpontjában találkozó derékszögű háromszögekből:

$$(2{,}4-m)^2+2^2=(1{,}6+y)^2,$$

$$m^2+1^2=(1+y)^2.$$ 2 pont

Kivonással $2{,}4^2-4{,}8m+3=1{,}6^2-1+1{,}2y$, ahonnan $7{,}2=4{,}8m+1{,}2y$, majd $6=y+4m$ adódik. A második egyenletbe visszahelyettesítve az $y=6-4m$ kifejezést kapjuk a $15m^2-56m+48=0$ egyenletet, amelynek gyökei $m_{1,2}=\dfrac{56\pm16}{30}$, vagyis $m_1=2{,}4$ és $m_2=\dfrac{4}{3}$. 1 pont

A két gyök közül csak a kisebbik lehet jó, mert a kis kör középpontja „lejjebb” van, mint a nagy félköré. 1 pont

Ha $m=\dfrac{4}{3}$ akkor $y=6-4m=\dfrac{2}{3}$. A kis kör sugara $\dfrac{2}{3}$ egység. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Adjuk meg az összes olyan pozitív prímekből álló (p, q, r) számhármast, ahol

$a)$ $q \neq r$, valamint

$b)$ $p^q + p^r$ négyzetszám.

Megoldás. Legyen az általánosság megszorítása nélkül $q < r$.

(Természetesen, ha megkapunk így egy (p, q, r) jó számhármast, akkor (p, r, q) is megoldás lesz.)

Ekkor kiemelve p^q-t: $p^q + p^r = p^q(1 + p^{r-q}) = n^2$ valamely egész n-re. 1 pont

A p^q-nak csak p a prímosztója, de $1 + p^{r-q}$ p-vel osztva 1 maradékot ad, emiatt p^q, illetve $1 + p^{r-q}$ relatív prímek. 1 pont

De mivel n^2 prímfelbontásában a prímhatványosztók páros kitevővel szerepelnek, ezért q is páros, vagyis (mivel q prím is) $\to$ $q = 2$. 1 pont

Vagyis $n^2 = p^q(1 + p^{r-q}) = p^2\big(1 + p^{r-2}\big)$. Ezt osztva p^2-tel $\to$ $1 + p^{r-2} = \dfrac{n^2}{p^2} = m^2$ valamely egész m-re.

Innen mindkét oldalból 1-t elvéve, és szorzattá alakítva:

$$p^{r-2} = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1).$$ 1 pont

Innen két eset lehetséges: vagy $p \mid m - 1$, vagy $1 = m - 1$.

Ha $1 = m - 1$, akkor $2 = m$, és innen $(m + 1)(m - 1) = 3 = 3^1 = p^{r-2}$. Ekkor $p = 3$, és $r = 3$. Vagyis ekkor a lehetséges számhármasok: $(3; 2; 3)$ és $(3; 3; 2)$. 1 pont

Ha pedig $p \mid m - 1$, akkor $p \mid m + 1$ miatt $p \mid (m + 1) - (m - 1) = 2$ is teljesül. Vagyis ekkor $p = 2$.

Mivel ekkor $m - 1$, és $m + 1$ olyan kettőhatványok (hisz $2^{r-2} = (m + 1)(m - 1)$), melyek különbsége 2, emiatt $m - 1 = 2$, és $m + 1 = 4$ lehet csak.

Vagyis $2^{r-2} = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$. Innen $r = 5$.

Vagyis ekkor a lehetséges számhármasok: $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

Összefoglalva: 4 darab rendezett számhármas felel meg a feltételeknek: $(3; 2; 3)$; $(3; 3; 2)$; $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont