Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy p és q pozitív egészek, továbbá $p > q$. Bizonyítsuk be, hogy az $1 + \sqrt{2}$ a $\dfrac{p}{q}$ és a $\dfrac{p+q}{p-q}$ közé esik.

2. Két, egymást nem tartalmazó, közös ponttal nem rendelkező kör közös szimmetriatengelye a köröket rendre az A, B, C, D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a közös külső illetve belső érintőszakaszok felírhatók két-két olyan szakasz mértani közepeként, amelyek végpontjai az A, B, C, D pontok közül valók!

3. Egy halmaz elemei olyan pozitív egész számok, amelyek oszthatóak az 5, 11, 23, 31 prímszámok mindegyikével, de más prímszámokkal nem. A halmaz bármely két elemének a szorzata nem négyzetszám. Mennyi az ilyen halmazok elemszámának maximuma?

4. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2016\sqrt{x_{2016} - 2016^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}}{2}.$$