Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Tegyük fel, hogy p és q pozitív egészek, továbbá $p > q$. Bizonyítsuk be, hogy az $1+\sqrt{2}$ a $\frac{p}{q}$ és a $\frac{p+q}{p-q}$ közé esik.

Megoldás. Legyen $\frac{p}{q} = r$. Ekkor $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}-1} = \frac{r+1}{r-1}$, ahol r 1-nél nagyobb racionális szám. 2 pont

További átalakításokkal

$$r = (r-1)+1 \quad \text{és} \quad \frac{r+1}{r-1} = \frac{r-1+2}{r-1} = 1 + \frac{2}{r-1}.$$

Tehát elegendő belátni, hogy az $1+\sqrt{2}$ az $1+(r-1)$ és az $1+\frac{2}{r-1}$ közé esik. 2 pont

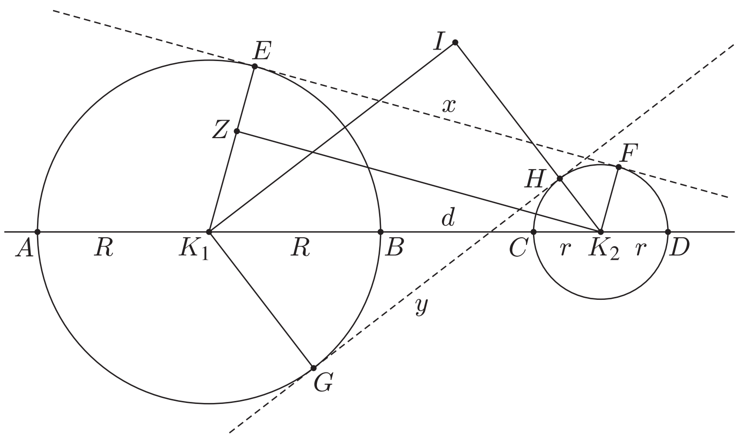
Ez pontosan akkor igaz, ha a $\sqrt{2}$ az $r-1$ és a $\frac{2}{r-1}$ közé esik. 1 pont

Ez pedig igaz, mert az $r-1$ és a $\frac{2}{r-1}$ pozitív számok mértani közepe pontosan $\sqrt{2}$, és két szám mértani közepe nyilván a két szám között van. Az is teljesül, hogy $r-1 \neq \frac{2}{r-1}$, mert $r-1$ racionális, $\sqrt{2}$ pedig irracionális. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Két, egymást nem tartalmazó, közös ponttal nem rendelkező kör közös szimmetriatengelye a köröket rendre az A, B, C, D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a közös külső illetve belső érintőszakaszok felírhatók két-két olyan szakasz mértani közepeként, amelyek végpontjai az A, B, C, D pontok közül valók!

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit! A külső érintőszakasz $x := EF$, a belső érintőszakasz $y := GH$, a körök távolsága $d := BC$, a nagyobb kör sugara R, a kisebb kör sugara r. (A leírt számolások $R = r$ esetben is működnek, ilyenkor az egyik Pitagorasz-tétel trivialitássá egyszerűsödik.)



A feladat feltételeit helyesen feltüntető ábra. 1 pont

Mivel az érintő merőleges a sugárra, K_1E szakasz párhuzamos K_2F szakasszal. Legyen K_2Z párhuzamos EF-fel, így $K_2Z = x$ és $K_1Z = R - r$. Mivel $K_1ZK_2\sphericalangle = 90°$, ezért Pitagorasz tétele alapján: 1 pont

$$x^2 = (R + d + r)^2 - (R - r)^2 = d^2 + 2dR + 2dr + 4Rr = d(d + 2R) + 2r(d + 2R) =$$
$$= (d + 2R)(d + 2r). \qquad \text{1 pont}$$

Tehát
$$x = \sqrt{AC \cdot BD}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Hasonló módon: $K_1I = y$, $K_2I = R + r$ és $K_1IK_2\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Pitagorasz tétele alapján:
$$y^2 = (R + d + r)^2 - (R + r)^2 = d^2 + 2dR + 2dr = d(d + 2R + 2r). \qquad \text{1 pont}$$

Tehát
$$y = \sqrt{BC \cdot AD}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

3. Egy halmaz elemei olyan pozitív egész számok, amelyek oszthatóak az 5, 11, 23, 31 prímszámok mindegyikével, de más prímszámokkal nem. A halmaz bármely két elemének a szorzata nem négyzetszám. Mennyi az ilyen halmazok elemszámának maximuma?

Megoldás. Vegyük a halmaz minden elemének prímtényezős felbontását. Két elem szorzata akkor lesz négyzetszám, ha a szorzatban minden kitevő páros. 1 pont

Páros számot két páros vagy két páratlan összegeként kaphatunk. 1 pont

Ezért ha két elemben mind a négy kitevőnek megegyezik a paritása, akkor a szorzat négyzetszám. 2 pont

Ha két elem esetén legalább egy kitevőnek más a paritása, akkor a szorzat nem négyzetszám. 1 pont

Ezért minden elemben a kitevőknél kétféleképpen dönthetünk, lehet páros vagy páratlan. 1 pont

Ezért az ilyen halmazok elemszámának maximuma $2^4 = 16$. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2016\sqrt{x_{2016} - 2016^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}}{2}.$$

Megoldás. Tekintsük az egyenlet bal oldalán álló kifejezés k. tagját:

$$k\sqrt{x_k - k^2} = \sqrt{k^2\bigl(x_k - k^2\bigr)}\,.$$ 1 pont

Az egyenlőség jobb oldala a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján kisebb vagy egyenlő, mint $\dfrac{k^2 + \bigl(x_k - k^2\bigr)}{2} = \dfrac{x_k}{2}$, 2 pont

egyenlőség pontosan akkor áll fent, ha $x_k = 2k^2$. 1 pont

(A felírt becslések akkor is igazak maradnak, ha valamelyik k-ra $x_k = k^2$. Ilyenkor a gyökös kifejezés értéke 0, $\dfrac{x_k}{2}$ pedig pozitív.)

Ha összeadjuk a tagokat $k = 1$-től 2016-ig, azt kapjuk, hogy egyenlőség csak akkor lehet, ha $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 18$, $\ldots$, $x_{2016} = 2 \cdot 2016^2$. 2 pont

Ezek a számok valóban kielégítik az egyenletet. 1 pont

Összesen: 7 pont