**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

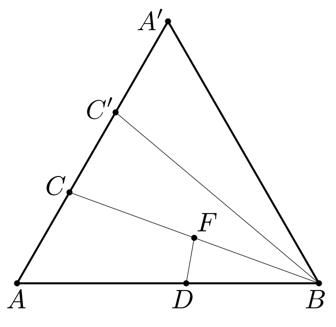
# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2015/2016-os tanév
# 3. (döntő) forduló
# Haladók II. kategória

**Megoldások és javítási útmutató**

**1.** Az $ABC$ háromszögben $BAC\sphericalangle = 60°$, $ACB\sphericalangle = 100°$ és $AB = 4$ cm. Tudjuk még, hogy a $BC$ oldal felezőpontja $F$, továbbá $D$ az $AB$ oldal olyan pontja, amelyre $BFD\sphericalangle = 80°$. Bizonyítsuk be, hogy $T_{ABC} + 2 \cdot T_{BFD} = \sqrt{24}$ cm$^2$, ahol $T_{XYZ}$ az $XYZ$ háromszög területét jelöli.

**Megjegyzés:** *A feladat sajnos hibásan lett kitűzve. A pontos érték helyesen $\sqrt{12}$ és nem $\sqrt{24}$. A döntőben 8 versenyző észrevette a hibát, és a helyes megoldást adta meg. Az összes beadott dolgozat átnézése után úgy láttuk, hogy a legtöbben nem jutottak el odáig, ahol a hibás kitűzés problémát okozott volna. Ezért a döntő végeredményének kialakításakor a Bizottság úgy döntött, hogy azokra a dolgozatokra jár maximális pont, amelyekben a helyes $\left(\sqrt{12}\right)$ érték szerepel. Amennyiben egy versenyzőt a hibás kitűzés megzavart, azt nagyon sajnáljuk, elnézést kérünk.*

**1. megoldás.**




Készítsünk ábrát, amin az $ABC$ háromszöget kiegészítjük egy szabályos háromszöggé, a következő módon. Az $AC$ oldal $C$-n túli meghosszabbításán úgy vesszük fel az $A'$ pontot, hogy $AB = AA'$ legyen. Ekkor nyilván $ABA'$ szabályos. Vegyük fel továbbá a $CA'$ szakaszon azt a $C'$ pontot, amelyre $AC = C'A'$. Ekkor $ABC$ és $A'BC'$ egybevágó háromszögek, hiszen $AB = A'B$, $AC = A'C'$ és $BAC\sphericalangle = BA'C'\sphericalangle = 60°$. 3 pont

Egyszerű szögszámítással kapjuk, hogy $BFD_\triangle \sim BC'C_\triangle$ (szögeik: 20°, 80°, 80°), és mivel $F$ a $BC$ felezőpontja, továbbá a háromszögek egyenlő szárúak, ezért a hasonlóság aránya 1 : 2. 1 pont

A hasonlóság miatt $T_{BCC'} = 4T_{BFD}$. 1 pont

Az $AA'B$ háromszög területe most már kifejezhető az $ABC$ és $BFD$ háromszögek területével

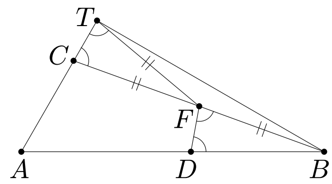
$$T_{AA'B} = T_{ABC} + T_{BCC'} + T_{BC'A'} = 2T_{ABC} + T_{BCC'} = 2T_{ABC} + 4T_{BFD}. \qquad \text{1 pont}$$

Tehát a keresett mennyiség éppen az $AA'B$ szabályos háromszög területének fele:

$$2T_{BFD} + T_{ABC} = \frac{1}{2}T_{AA'B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 4^2}{4} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}. \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont

**2. megoldás vázlata** (*Dobák Dávid dolgozata alapján*): Jelölje $T$ a $B$-ből induló magasság talppontját. Ekkor a $BCT$ háromszögre alkalmazva a Thalész-tételt: $FT = FC = FB$. A $BAT$ háromszög egy szabályos háromszög fele, innen $FBT\sphericalangle = FTB\sphericalangle = 10°$, vagyis $CFT\sphericalangle = 20°$.




Azt kaptuk, hogy $DBF_\triangle \equiv CFT_\triangle$. A $TF$ szakasz súlyvonal a $CBT$ háromszögben, így $2T_{BFD}$ éppen annyi, mint $T_{CTB}$. A keresett összeg pedig $T_{ABC} + 2 \cdot T_{BFD} = T_{ABC} + T_{CTB} = T_{ABT}$. Végül a szabályos háromszög területének fele: $\frac{\sqrt{3} \cdot 4^2}{8} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

**2.** Adjuk meg azt a négy valós számot, melyekre igaz, hogy bármelyikhez hozzáadva a másik három szorzatát, eredményül mindig 10-et kapunk!

**Megoldás.** Jelöljük a négy számot $x$, $y$, $z$, $v$-vel, szorzatukat $p$-vel. Írjuk fel például az $x$-re és $y$-ra vonatkozó egyenleteket:

$$x + yzv = 10,$$
$$y + xzv = 10.$$

Az elsőt $x$-szel, a másodikat $y$-nal szorozva következőket kapjuk:

$$x^2 + p = 10x,$$
$$y^2 + p = 10y.$$

Vonjuk ki az elsőből a másodikat és rendezzünk nullára:

$$x^2 - y^2 - 10x + 10y = 0. \qquad \text{1 pont}$$

$(x - y)(x + y - 10) = 0$, ahonnan $x = y$ vagy $x + y = 10$. Ez bármely két ismeretlenről elmondható, azaz bármely kettő vagy egyenlő vagy az összegük 10. Az ismeretlenek között csak 2-féle szám lehet: $y$, $z$ és $v$ vagy $x$-szel vagy $10 - x$-szel egyenlő. 1 pont

Ezért 3 eset lehetséges:

$A$. A négy szám egyenlő, ekkor az ismeretlenek közös értéket $x$-szel jelölve egy egyenletünk van: $x + x^3 = 10$, $x^3 - 8 + x - 2 = 0$.

$x^3 - 8$-at szorzattá alakítva és $x - 2$-t kiemelve 1 pont
$(x-2)\big(x^2 + 2x + 5\big) = 0$, $D < 0$ miatt $x = 2$, azaz mind a 4 szám 2. 1 pont

$B$. Két-két szám egyenlő, például $x = z$ és $y = v$, valamint $x + y = 10$. Ekkor 2 egyenletünk van: $x + xy^2 = 10$ és $y + x^2y = 10$. E kettőt egymásból kivonva:

$$\begin{aligned} x - y + xy^2 - x^2y &= 0,\\ x - y - xy(x-y) &= 0,\\ (x-y)(1-xy) &= 0. \end{aligned}$$

$x \neq y$ miatt $xy = 1$. 1 pont

Az $xy = 1$, $x + y = 10$ egyenletrendszert megoldva a két számra $5 + \sqrt{24}$ és $5 - \sqrt{24}$ adódik,ezek megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. Tehát 2 szám $5 + \sqrt{24}$, a másik kettő $5 - \sqrt{24}$. Ezek megoldásai az eredeti egyenletrendszernek. 1 pont

$C$. 3 szám egyenlő ($x = z = v$, a negyedik ezektől különbözik és $x + y = 10$). Az eredeti 4 egyenlet ekkor így néz ki:

$$\begin{aligned} x + x^2y &= 10,\\ y + x^3 &= 10. \end{aligned}$$

Kivonás után:

$$\begin{aligned} x - y + x^2y - x^3 &= 0,\\ x - y - x^2(x-y) &= 0,\\ (x-y)\big(1-x^2\big) &= 0,\\ (x-y)(1-x)(1+x) &= 0. \end{aligned}$$

$x \neq y$ miatt $x = 1$ vagy $x = -1$, ahonnan $y = 9$ vagy $y = 11$, azaz 3 szám 1, a negyedik 9, vagy 3 szám $-1$, a negyedik 11. Ezek valóban megoldásai az eredetinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

**3.** Hány olyan 1-nél nagyobb egész szám van, amelyet bármely nála kisebb pozitív egész számmal osztva véges tizedestörtet (vagy egész számot) kapunk eredményül?

**1. megoldás.** A feltételeknek $n \leqq 6$ esetén pontosan a 2, a 3 és a 6 számok felelnek meg, és bizonyítjuk, hogy több megoldás nincs is. 1 pont

A továbbiakban tehát tegyük fel, hogy $n > 6$.

Egy racionális szám tizedestört alakja pontosan akkor véges, ha a tört legegyszerűbb alakjában (melyben a számláló és a nevező egymáshoz relatív prímek) a nevező prímtényezői között csak a 2 és az 5 szerepel. 1 pont

Mivel $(n, n-1) = 1$ és $\dfrac{n}{n-1}$ tizedestört alakja is véges, ezért $n - 1 = 2^a \cdot 5^b$ alakú.

Mivel $(n, n-2)$ =1 vagy 2, és $\dfrac{n}{n-2}$ tizedestört alakja is véges, ezért $n - 2 = 2^c \cdot 5^d$ alakú. 1 pont

Mivel $(n-1, n-2) = 1$, az előző két eredmény és $n > 6$ miatt $n-1$ és $n-2$ közül az egyik az 5-nek a másik pedig a 2-nek valódi (pozitív egész kitevőjű) hatványa ($n$ paritásától függően).

Vizsgáljuk az $n - 3$-at. Ez egyrészt biztosan nem osztható 5-tel, másrészt biztosan osztható 3-mal, amiért $n$ is osztható 3-mal. Ekkor $(n, n-3) = 3$, s így mivel $\dfrac{n}{n-3}$ tizedestört alakja is véges, $n - 3 = 2^e \cdot 3$ alakú. 1 pont

Ha $n$ páros, akkor $n - 3 = 2^e \cdot 3$ páratlan, vagyis $e = 0$ és $n - 3 = 3$ miatt $n = 6$, ami ellentmond $n > 6$-nak. 1 pont

Ha $n$ páratlan, akkor $n - 1$ páros, sőt 2-hatvány, legyen $n - 1 = 2^f$, ahol $f \geqq 2$. Ebből $n-3 = 2^f - 2$, amit összevetve $n-3 = 2^e \cdot 3$-mal azt kapjuk, hogy $2^f - 2 = 2 \cdot \left(2^{f-1} - 1\right) = 2^e \cdot 3$. 1 pont

A zárójelben levő kifejezés páratlan, így a számelmélet alaptétele miatt $e = 1$ és $f = 3$, azaz $n = 9$, ami mégsem megoldás, mert a $\dfrac{9}{7}$ tizedestört alakja nem véges. 1 pont

Tehát más megoldás tényleg nincs, csak 3 szám (a 2, a 3 és a 6) teljesíti a feladat feltételeit.

Összesen: 7 pont

**2. megoldás vázlata** (*Villányi Soma dolgozata alapján*): Két pozitív egész hányadosa akkor és csak akkor egész, ha az osztandó többszöröse az osztónak. Ha nem ez a helyzet, akkor a hányados csak úgy lehet véges tizedestört, ha az osztó prímtényezős felbontásában a 2-től és 5-től különböző prímtényezők legfeljebb akkora kitevőn szerepelnek, mint az osztandó prímtényezős felbontásában.

Az $n \leqq 9$ számokat egyszerűen végignézhetjük, és azt találjuk, hogy csak $n = 2$, $n = 3$ és $n = 6$ jó.

Most tegyük fel, hogy létezik $n > 9$ egész, amely megfelel a feladat feltételeinek. Legyen $3^a$ a legnagyobb háromhatvány, amely kisebb $n$-nél, így $3^a < n \leqq 3^{a+1}$. Mivel a feltétel szerint $\dfrac{n}{3^a}$ egész vagy véges tizedestört, ezért $n$ osztható $3^a$-nal. Hasonlóan $\dfrac{n}{7}$ egész vagy véges tizedestört, ezért $n$ osztható 7-tel.

Az eddigiek alapján $n = 3^a \cdot 7 \cdot m$, ahol $m$ pozitív egész. De $3^a \cdot 7 \cdot m > 3^{a+1}$, ami ellentmond az $n \leqq 3^{a+1}$ feltevésünknek. Tehát a 9-nél nagyobb egészek között nincsen megfelelő $n$ szám, így az összes megoldást megtaláltuk.