

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2015/2016-os tanév

1. forduló

Haladók III. kategória

Feladatok

1. Az a és b befogójú derékszögű háromszögnek megrajzoltuk a köré írt körét. Fejezzük ki a és b segítségével annak a körnek a sugarát, amely érinti a háromszög befogóit és a köré írt kört belülről.

2. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{3}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a_n egész minden n -re, viszont nem teljes hatvány semmilyen n -re (vagyis nem egy egész szám valamely 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa)!

3. Egy téglalapot akkor nevezünk egy másik téglalapba *beírtnak*, ha csúcsai a másik téglalap különböző oldalainak belső pontjai. Egy $ABCD$ téglalapba két téglalapot írtunk, amelyeknek van egy közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy a két beírt téglalap területének összege egyenlő az $ABCD$ téglalap területével!

4. Az a_1, a_2, \dots, a_7 nemnegatív számok összege 1. Tekintsük az alábbi öt mennyiséget: $a_1 + a_2 + a_3$, $a_2 + a_3 + a_4$, $a_3 + a_4 + a_5$, $a_4 + a_5 + a_6$, $a_5 + a_6 + a_7$. Jelölje ezen öt érték maximumát M . Mekkora lehet M legkisebb értéke?

5. Két pozitív egész szám hasonló, ha

- a két szám (tíz-es számrendszerbeli alakjában) ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza;
- a két számban a közös számjegyek darabszáma azonos;
- valamint egyik szám sem tartalmazza a 0-s számjegyet.

(Pl. hasonlóak a 1454412, és a 4441125, de hozzájuk nem hasonló az 1245 szám.)

Van-e három olyan 2016-jegyű A , B , C szám, hogy A hasonló B -vel, A hasonló C -vel, és $C = A + B$?