Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
3. (döntő) forduló
Kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan $p > q > 0$ számpár van, amelynek tagjai prímszámok, és $p^4 - q^4$-nek 8-nál kevesebb pozitív osztója van?

Megoldás. $p^4 - q^4 = (p^2 - q^2)(p^2 + q^2) = (p - q)(p + q)(p^2 + q^2)$.

Ha $p > q > 0$ és $p - q \neq 1$, akkor

$$1 < p - q < p + q < p^2 - q^2 < p^2 + q^2 < (p - q)(p^2 + q^2) < (p + q)(p^2 + q^2) < p^4 - q^4.$$

Így felsoroltuk a $p^4 - q^4$ kifejezés 8 különböző pozitív osztóját.

Tehát ahhoz, hogy 8-nál kevesebb pozitív osztót kapjunk, szükséges feltétel, hogy $p - q = 1$ legyen. Ez egyetlen esetben lehetséges: ha $p = 3$ és $q = 2$.

Ekkor $p^4 - q^4 = 65$, aminek 4 pozitív osztója van. Ezek az $(1, 5, 13, 65)$ számok. Tehát a kapott megoldás megfelelő, és ez az egyetlen megoldása a feladatnak.

2. Andris és Bence a következő játékot játsszák: feldobnak egy pénzérmét, és ha a dobás eredménye fej, akkor Andris, ha pedig írás, akkor Bence kap 1 pontot. A játékot az nyeri meg, aki legalább 5 pontot szerez, legalább 2 pont különbséggel. A játékot végül Andris nyerte meg $12 : 10$-re.

Hány különböző dobássorozat vezethetett ehhez az eredményhez?

Megoldás. Mivel a játéknak korábban nem lett vége, így egyik játékos sem vezethetett $5 : 3$-ra (vagy nagyobb mértékben) a játék során, tehát ki kellett alakulnia a $4 : 4$-es állásnak.

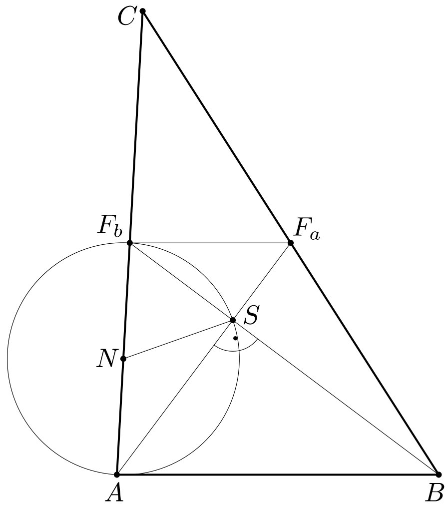
Ez azt jelenti, hogy az első 8 dobásból pontosan 4-4 lett fej, illetve írás, ez $\dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$-féleképpen történhetett. (Ez a részeredmény megkapható ismétléses permutációval, kombinációval, vagy akár leszámlálással is.)

$4 : 4$ után senki sem nyert két egymást követő pontot $10 : 10$-ig, azaz bárki is nyert egyenlő állás után egy pontot, a következőt mindig a másik nyerte meg, és azzal kiegyenlített. Így $4 : 4$-től $10 : 10$-ig összesen $2^6 = 64$-féleképpen alakulhatott az eredmény. $10 : 10$ után az utolsó két pontot Andris szerezte meg, és ezzel összességében a játékot is megnyerte.

Így összesen $70 \cdot 64 = 4480$-féle dobássorozat vezethetett a $12 : 10$-es végeredményhez.

3. Egy háromszög AB oldala 10 cm. Az A csúcsból kiinduló súlyvonal 9 cm, a B csúcshoz tartozó súlyvonal pedig 12 cm hosszú. Igazoljuk, hogy az AC oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja $\sqrt{13}$ cm-re van a háromszög súlypontjától!

Megoldás.



A háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, így $AS = 6$ cm és $BS = 8$ cm, továbbá $SF_a = 3$ cm és $SF_b = 4$ cm.

Az ASB háromszög oldalai 10 cm, 6 cm és 8 cm hosszúak, így a Pitagorasz-tétel megfordításának értelmében a háromszög S csúcsánál derékszög található, azaz a háromszög súlyvonalai merőlegesek egymásra. (Ugyanerre a megállapításra juthatunk, ha berajzoljuk az F_aF_b középvonalat, amelynek hossza az AB oldal fele, azaz 5 cm. Ekkor az F_aSF_b háromszög oldalai 5 cm, 3 cm és 4 cm hosszúságúak.)

Tekintsük az AF_b szakasz fölé írt Thalész-kört, ennek középpontja az AC oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja: N. Mivel ASF_b szög derékszög, ezért a Thalész-tétel megfordításának értelmében S rajta van ezen a körön.

Az NS távolság így éppen a kör sugarának felel meg, így ennek hossza az AF_b szakasz hosszának fele.

Mivel az ASF_b háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk, hogy

$$AF_b = \sqrt{AS^2 + SF_b^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}\,.$$

Innen $NS = \dfrac{\sqrt{52}}{2} = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 13}}{2} = \dfrac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}\,.$