Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
2. (döntő) forduló
Haladók III. kategória

1. Az ABC háromszög hegyesszögű. Minden magasságszakaszán felvesszük a csúcstól távolabbi harmadolópontokat, legyenek ezek rendre A', B', C'. Igazoljuk, hogy az ABC és az A' $B'C'$ háromszögek hasonlóak.

2. A H halmazt hívjuk *izgalmas* halmaznak, ha olyan véges, valós számokból álló halmaz, hogy minden $x \in H$ esetén $x^2 - x \in H$ is teljesül.

Hány elemű az a G halmaz, amely az összes lehetséges 2017-elemű izgalmas H halmazok uniója?

3. Adott egy 8×8-as sakktábla. Nevezzük főátlónak az $a1$–$h8$ átlót. Az átló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív négyzetszámokat írunk. A kitöltés után megvizsgáljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Legkevesebb hány különböző szám lehet a 16 összeg között?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

2. A H halmazt hívjuk *izgalmas* halmaznak, ha olyan véges, valós számokból álló halmaz, hogy minden $x \in H$ esetén $x^2 - x \in H$ is teljesül.

Hány elemű az a G halmaz, amely az összes lehetséges 2017-elemű izgalmas H halmazok uniója?

Megoldás. Legyen $f(x) = x^2 - x$. Ha $y = f(x)$, akkor azt fogom mondani, hogy y szám x szám képe, míg x szám y őse.

Először megmutatjuk, hogy ha $2 < x \in H$, vagy $-1 > x \in H$, akkor H halmaz nem véges, és így nem izgalmas.

Ha $2 < x \longrightarrow x^2 - x = x(x-1) > x(2-1) = x$, vagyis minden ilyen $x \in H$ esetén van olyan $x' > x$, hogy $x' \in H$, azaz H nem véges.

Ha $-1 > x \longrightarrow x^2 - x = x(x-1) > (-1)\big((-1)-1\big) = 2$, vagyis ilyen x-ek képe 2-től nagyobb, innen az előző sor miatt H nem lehet véges. 1 pont

Most nézzük meg, hogy mi van, ha $0 < x < 1$! Ha $0 < x < 1$, akkor

$$f\big(f(x)\big) = \big(x^2 - x\big)^2 - \big(x^2 - x\big) = x(x-1)\big(x^2 - x - 1\big) = x(1-x)\big(1 + x - x^2\big).$$

Mivel a pozitív tagú (ezért kellett az utolsó lépésben az előbb $(-1)\cdot(-1)$-gyel szorozni) számtani-és-mértani-közepek közötti összefüggés miatt

$$0 < M^2\big(1-x; 1+x-x^2\big) = (1-x)\big(1+x-x^2\big) \leqq \left(\frac{(1-x)+(1+x-x^2)}{2}\right)^2 =$$

$$= S^2\big(1-x; 1+x-x^2\big),$$

és

$$\left(\frac{(1-x)+(1+x-x^2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-x^2}{2}\right)^2 < 1.$$

Vagyis ha $0 < x < 1$, akkor $0 < f\big(f(x)\big) < x$, de akkor megintcsak nem lehet H véges, és így izgalmas sem. 1 pont

Most nézzük meg, van-e az $f(x) = x^2 - x$ függvénynek fixpontja, vagyis olyan c szám, hogy $f(c) = c$.

Az $x^2 - x = x$ egyenletet megoldva adódik, hogy a két lehetséges fixpont: $x_1 = 2$, és $x_2 = 0$.

Ezek, és csak ezek azok a számok, amelyek bevétele a H halmazba nem vonja maga után egy másik szám bevételét H-ba (vagyis saját maguk képei, illetve ősei).

Most nézzük meg, mely számok a 0, és a 2 számok további ősei!

Megoldva $x^2 - x = 2$ egyenletet adódik, hogy 2 másik őse a -1, míg megoldva $x^2 - x = 0$ egyenletet adódik, hogy 0 másik őse az 1.

Most vizsgáljuk meg, hogy ezeknek az új számoknak mik a további ősei! Mivel

$$f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

ezért:

- ha $y = -\frac{1}{4}$, akkor pontosan egy őse van $\left(x = \frac{1}{2}\right)$,
- ha $y > -\frac{1}{4}$, akkor pontosan két őse van, míg
- ha $y < -\frac{1}{4}$, akkor nincsen egyetlen őse sem.

Emiatt a -1-nek nincsen őse, az 1-nek viszont két őse is van. Vizsgáljuk az 1 őseit!

Megoldva az $x^2 - x = 1$ egyenletet adódik, hogy 1 ősei: $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\approx 1{,}618 > \frac{5}{4}\right)$, illetve $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

A továbbiakban fellépő ősöket aszerint, hogy pozitívak (p_i), vagy negatívak (q_i) jelölésben megkülönböztetem, illetve p_k őseit fogom p_{k+1}-gyel, illetve q_{k+1}-gyel jelölni! Az is világos, hogy egy szám őseinek az összege (mivel $f(x)$ szimmetriatengelye $x = \frac{1}{2}$) éppen $+1$. 1 pont

Mivel $f(x)$ az $x > 1$ esetén szigorúan monoton nő, ezért p_1 pozitív p_2 ősére $\frac{5}{4} < p_1 < p_2$ és hasonlóan valamennyi k esetén $\frac{5}{4} < p_k < p_{k+1}$. Emiatt persze a fellépő további ősök valóban negatívak (hiszen egy y két ősének összege pontosan $+1$), sőt minden k-ra $q_k = 1 - p_k < < 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egyetlen q_k-nak sincsen őse! 1 pont

Most vizsgáljuk meg, hogy mi a helyzet, ha $1 < x < 2$ és olyan az x, hogy két szomszédos p_k, p_{k+1} közé esik, vagyis $1 < p_k < x < p_{k+1} < 2$!

Ekkor mivel $f(x)$ az $1 < x < 2$ esetén szigorúan monoton nő,

$$p_{k-1} = f(p_k) < f(x) < f(p_{k+1}) = p_k.$$

Ezt k-szor alkalmazva $0 < f\Big(f\Big(f \dots \big(f(x)\big) \dots\Big)\Big) < 1$. Vagyis ilyen $x \in H$ esetén van olyan $x' \in H$ is, amelyre $0 < x' < 1$, de ez (a korábban leírtak miatt) azt jelenti, hogy a H nem véges, és így nem is izgalmas!

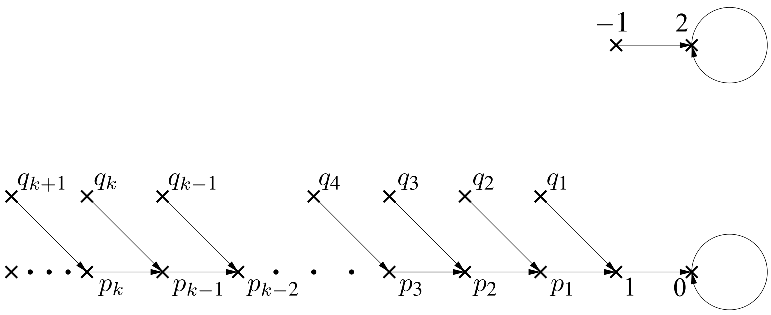
Ha $-1 < x < 0$, és x nem egyezik meg semelyik q_k-val sem, akkor a fenti észrevétel ugyanígy megismételhető; ilyen $x \in H$ esetén sem lesz véges H. 1 pont

Vagyis H végessége miatt H elemei csak a -1; 2 (ezek ketten külön „csoportot képeznek”), illetve a

$$0;\ 1;\ p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ p_2;\ q_2;\ p_3;\ q_3;\ \dots;\ p_k;\ q_k;\ \dots$$

(ebben a „csoportban” végtelen sok lehetséges tag van) közül kerülhetnek ki, méghozzá az alábbi irányított gráfnak megfelelően.

(*Az ábrában a nyilak/irányított élek azt jelentik, hogy az adott x bevétele esetén mely másik számot muszáj bevennünk H-ba.*)



Ha az alsó ábrában a lehető legnagyobb indexű olyan p_i-t akarom belevenni H-ba, hogy H még lehessen 2017 elemű, akkor ez a p_{2015} lesz, mert ennek a belevétele az összes tőle kisebb indexű p_i bevételét magával vonja, valamint az 1-t, és a 0-t is. Nyilván a legnagyobb indexű q_i, amit belevehetek az a q_{2015} szintén, és triviális, hogy bármely kisebb indexű $(1 \leqq i \leqq 2014)$ p_i-re, vagy q_i-re tudunk csinálni olyan izgalmas 2017 elemű H halmazt, hogy az adott p_i, vagy q_i eleme legyen, vagyis ezeket a $p_i; q_i$-ket (és csak ezeket!) tartalmazni fogja a G halmazom, valamint tartalmazni fogja rendre a $-1; 0; 1; 2$ négy egész számot is.

Azaz G elemszáma: $|G| = 2 \cdot 2017 = 4034$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Adott egy 8×8-as sakktábla. Nevezzük főátlónak az $a1$–$h8$ átlót. Az átló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív négyzetszámokat írunk. A kitöltés után megvizsgáljuk a sor-, illetve oszlopösszegeket. Legkevesebb hány különböző szám lehet a 16 összeg között?

8								
7								0
6							0	0
5						0	0	0
4					0	0	0	0
3				0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Megoldás. A h oszlop összege a $h8$ mezőn álló szám. Ez azonban szerepel a nyolcadik sor összegében (más számokal együtt). Ez a két összeg nem lehet azonos, így legalább kétféle szám szerepel az összegek között. 1 pont

Ezt el is lehet érni. Ha a tábla 2×2-es, akkor minden olyan kitöltés megfelelő, aminek a két szélső mezőjében azonos szám áll. Mutatunk egy kitöltést a 4×4-es négyzetben is (ld. 1. ábra). 1 pont

1	9	25	169
9	16	144	
25	144		
169			

1. ábra. 4×4-es négyzet kitöltése (a nem jelölt négyzetekben 0-ák állnak)

Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es táblázatot már sikerült kitölteni úgy, hogy a teljes sor és oszlop kivételével mindenhol máshol a számok összege A, míg a teljes sorban és oszlopban B. További feltételünk, hogy A páratlan legyen.

	B	A	A	A	A	
B	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	A	y
A	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	x	
A	$\star$	$\star$	$\star$	x		
A	$\star$	$\star$	x			
A	A	x				
	y					

2. ábra. Átlóval bővítünk egy megfelelő kitöltést

Egészítsük ki a $n \times n$ négyzetet egy átlóval, használjuk az 2. ábra jelöléseit. Célunk, hogy az utolsó n sor és oszlop összege azonos legyen. Ehhez az alábbi összegeket kell egyenlővé tennünk:

$$A + x = \ldots = A + x = y.$$

Azaz olyan x és y számokat válasszunk, amire igaz, hogy $y - x = A$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $x = \left(\dfrac{A-1}{2}\right)^2$ és $y = \left(\dfrac{A+1}{2}\right)^2$ megfelelő választás. 2 pont

Így kaptunk egy kitöltést a $(n+1) \times (n+1)$-es esetre. A teljes sor és oszlop összege $B' = B + \left(\dfrac{A+1}{2}\right)^2$, míg a többi sor, illetve oszlop összege $A' = \left(\dfrac{A+1}{2}\right)^2$.

Mivel A egy páratlan négyzetszám, ezért néggyel osztva 1 maradékot ad, így $A = 4k + 1$. Emiatt $A' = \left(\dfrac{(4k+1)+1}{2}\right)^2 = 2k + 1$, azaz A' szintén egy páratlan szám lesz. 2 pont

Az indukciós lépésünk működik, így eljuthatunk a 8×8-as négyzet megfelelő kitöltéséhez. Tehát létezik olyan kitöltés, amely sor- és oszlopösszegei között csak kétféle szám szerepel. 1 pont

Összesen: 7 pont