Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
3. (döntő) forduló
Kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Valamely a, b, c prímszámokra és k pozitív egész számra teljesül a következő egyenlőség: $a^2 + b^2 + c^2 = 9k^2 + 13$. Adjuk meg k összes lehetséges értékét!

Megoldás. A jobb oldalon szereplő $9k^2 + 13$ kifejezés 3-mal vett osztási maradéka bármely k pozitív egész szám esetén 1, tehát a baloldalnak is 3-mal osztva 1 maradékot kell adnia. 2 pont

Mivel egy négyzetszám 3-mal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat, 1 pont
és az $a^2 + b^2 + c^2$ összegnek 3-mal osztva 1 maradékot kell adnia, ezért az a^2, b^2, c^2 négyzetszámok közül kettő 3-mal osztható, egy pedig 3-mal osztva 1 maradékot ad. 1 pont

Mivel a 3 prímszám, ezért például a^2 pontosan akkor osztható 3-mal, ha a is osztható 3-mal. 1 pont

Mivel az a, b, c számok prímek, ezért ha kettő közülük 3-mal osztható, akkor ez a kettő 3-mal egyenlő, hiszen a 3 az egyetlen 3-mal osztható prímszám. Legyen például $a = b = 3$. 1 pont

Ekkor

$$\begin{aligned} c^2 + 18 &= 9k^2 + 13, \\ 5 &= 9k^2 - c^2, \\ 5 &= (3k - c)(3k + c). \end{aligned}$$ 2 pont

Mivel $3k - c < 3k + c$ és $3k + c > 0$, ezért $3k - c = 1$ és $3k + c = 5$. 1 pont

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $k = 1$, $c = 2$, és ezek valóban teljesítik azt a két feltételt, hogy c prímszám és k pedig pozitív egész szám.

Tehát k egyetlen lehetséges értéke: $k = 1$. 1 pont

Megjegyzés: A megoldás próbálgatással történő megtalálásáért (a, b és c, valamint k értékének helyes megadásáért) legfeljebb *2 pont* adható.

2. Egy szabályos sokszög alapú egyenes hasáb éleinek, lapátlóinak és testátlóinak száma valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő elemei. Hány lapja van ennek a hasábnak?

Megoldás. Jelölje n a hasáb alapsokszögének oldalszámát ($n \geqq 3$, n egész). Ekkor a hasáb

– éleinek száma $3n$; 1 pont

– lapátlóinak száma $2 \cdot \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} + 2n = n^2 - n$; 1 pont

– testátlóinak száma $n \cdot (n-3) = n^2 - 3n$. 1 pont

A megfelelő hasábok megtalálásához, elég a növekvő számtani sorozatokkal foglalkoznunk. Mivel a lapátlók száma biztosan $2n$-nel nagyobb, mint a testátlók száma, ezért elegendő a következő 3 esetet vizsgálni:

1. eset: A számtani sorozat egymást követő elemei: $3n$, $n^2 - 3n$ és $n^2 - n$. Ekkor $d = 2n$. Innen $3n + 2n = n^2 - 3n$, ahonnan $n = 8$. 2 pont

2. eset: A számtani sorozat egymást követő elemei: $n^2 - 3n$, $3n$ és $n^2 - n$. Ekkor $d = n$. Innen $n^2 - 3n + n = 3n$, ahonnan $n = 5$. 2 pont

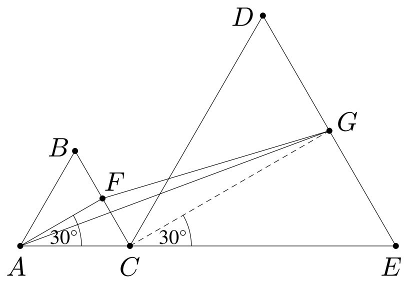
3. eset: A számtani sorozat egymást követő elemei: $n^2 - 3n$, $n^2 - n$ és $3n$. Ekkor $d = 2n$. Innen $n^2 - n + 2n = 3n$, ahonnan $n = 2$, ami nem lehet megoldás. 2 pont

Tehát két hasáb felel meg a feladat feltételeinek: a szabályos ötszög alapú, illetve a szabályos nyolcszög alapú. Előbbinek 7, utóbbinak 10 lapja van. 1 pont

Megjegyzés: Valamelyik megoldás próbálgatással történő megtalálásáért (egy konkrét hasáb éleinek, lapátlóinak, testátlóinak leszámlálásáért, illetve a lapok számának megállapításáért) legfeljebb *3 pont* adható.

3. Az ABC és CDE szabályos háromszögekre teljesül, hogy C az AE szakasz egy belső pontja, a B és D csúcsok pedig az AE egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Legyenek F és G a BC, illetve a DE oldalak felezőpontjai. Határozzuk meg az AFG háromszög területét, ha tudjuk, hogy az ABC háromszög területe 24 cm^2, a CDE háromszögé pedig 60 cm^2!

Megoldás. Készítsünk ábrát.



1 pont

Egészítsük ki az ábrát a CG szakasszal. 2 pont

Ekkor az AF és CG szögfelezői az ABC és CDE háromszögeknek, így mindkét szakasz 30°-os szöget zár be az AE egyenessel, ezért egymással párhuzamosak. 2 pont

Így a C és G pontok egyenlő távolságra vannak az AF egyenestől. 1 pont

Ez viszont azt jelenti, hogy az AFC és AFG háromszögeknek közös az AF oldala és azonos hosszúságú az AF oldalhoz tartozó magassága. Így a két háromszög területe megegyezik. 2 pont

Mivel az AF szakasz felezi az ABC háromszög területét, ezért 1 pont

$$t(AFG) = t(AFC) = \frac{1}{2} t(ABC) = 12 \text{ cm}^2.$$ 1 pont