Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Feladatok

1. Egy tanár kijavította egy 12 fős csoport dolgozatait. A kijavított dolgozatok egymás felett helyezkednek el. A tanár készül felírni a jegyeket egy papírlapra, amelyen a tanulócsoport tagjainak neve van ábécé rendben felsorolva. A lap egyik oldalán tíz név szerepel, a másik oldalon pedig kettő. A lapnak kezdetben az az oldala van felül, amelyiken tíz név szerepel. A tanár először a legfelül lévő dolgozat jegyét írja a megfelelő diák neve mellé, majd az alatta levőét és így tovább. (Természetesen az utolsó jegy beírása után már nem fordítja meg a lapot.)

Döntsük el, hogy minek nagyobb az esélye: annak, hogy a tanár a lapot legalább négyszer megfordítja a jegyek beírása során, vagy annak, hogy legfeljebb háromszor? **7 pont**

2. Egy osztály túrázás közben azt játszotta, hogy egyikük összeadta a természetes számokat egy általa kiválasztott n természetes számig, és megmondta az eredményt a többieknek. Az mondhatta a következő összeget, aki először eltalálta n értékét.

Levente a 2273-at adta fel.

Péter közbeszólt: „Biztosan hibáztál összeadás közben, mert a természetes számok összege sohasem végződhet 73-ra!”

Bizonyítsuk be Péter állítását, azaz: Az első n természetes szám összege nem végződhet 73-ra! **7 pont**

3. Egy kör metszi egy adott O csúcsú ($\alpha < 180^\circ$) szög szárait, egyiket az A és B, másikat a C és D pontban. (Az A pont O és B között, a C pont O és D között van.) Az adott szög felezője a kört az M és az N pontban metszi. (O-hoz az M van közelebb.)

Bizonyítsuk be, hogy az $\widehat{AM}$ ív és az $\widehat{ND}$ ív összege egyenlő az $\widehat{MC}$ ív és a $\widehat{BN}$ ív összegével (a szóbanforgó négy ív az α szárai között van)! **7 pont**

4. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \tag{2}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0; 1[$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív. **7 pont**