

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

Feladatok

1. Anna matematika házi feladatára ráfolyt a tinta. A lapon egy másodfokú egyenlet volt

$$x^2 + bx + c = 0$$

alakban, de sajnos most csak a következő látszódik:

$$x^2 + \dots x + \dots = 0$$

az elsőfokú és a konstans b, c együtthatók „összetintázódtak”. Az egyenletről a következőket tudjuk:

- a két hiányzó b, c együttható egy-egy olyan egész szám, amelyek összege 2018,
- az egyenlet megoldásai egész számok.

Milyen számok lehettek a tintás b, c együtthatók?

7 pont

2. Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz alapjai AB és CD ($AB > CD$), az alapokra merőleges szár AD . A trapézba írt kör az AB alapot P -ben, a CD alapot R -ben érinti. A szárazon lévő érintési pontokat összekötő szakasz a PR szakaszt M -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A, M és C egy egyenesbe esik!

7 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletet! (p, q pozitív prímek, míg a természetes szám)

$$p^2 + p^2q^2 + q^2 = a^2$$

7 pont

4. Rajzoljunk a koordináta-rendszer origója mint középpont köré 1, illetve 4 egység sugarú köröket. Tekintsük a két kör közötti zárt körgyűrű tartomány pontjait. Mely pontokra lesz a következő kifejezés értéke a legkisebb, illetve a legnagyobb?

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy$$

7 pont

5. Egy 2018×2018 egységnégyzetből álló négyzet alakú táblázat néhány (egységnégyzetnyi) mezőjének középpontját pirosra színezzük. Legfeljebb hány középpont színezhető ki, ha azt szeretnénk, hogy ne legyen olyan derékszögű háromszög a táblázatunkban, amelynek csúcsait a középpontok közül választjuk és minden csúcsa piros.

7 pont