Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyen adott az $1 < n \in \mathbb{N}^+$, és definiáljuk $k \in \{2; \ldots; n\}$ esetén az $a_k, b_k \in \mathbb{N}^+$ számokat a következőképpen:

a_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $k^{a_k} \leq n$, míg

b_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $b_k^k \leq n$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n-re teljesül:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$$ **7 pont**

2. Adott $n \geq 3$ darab pont a síkon. Nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne. Válasszunk ki az összes lehetséges módon három pontot az adott pontok közül. Az így kapott háromszögek közül a legnagyobb területű területét jelöljük T-vel, a legkisebb területű területét t-vel. Tudjuk, hogy $\frac{T}{t} \leq 2$! Mely n értékekre valósulhat ez meg? **7 pont**

3. Melyek azok a $b > 1$ pozitív egész számok, amelyekre bármely k pozitív egész szám esetén van olyan n pozitív egész, hogy az n^2 négyzetszám b-alapú számrendszerben felírt jegyeinek az összege éppen k? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen adott az $1 < n \in \mathbb{N}^+$, és definiáljuk $k \in \{2; \ldots; n\}$ esetén az $a_k, b_k \in \mathbb{N}^+$ számokat a következőképpen:

a_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $k^{a_k} \leq n$, míg

b_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $b_k^k \leq n$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n-re teljesül:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$$ **7 pont**

Megoldás: Próbálkozzunk kicsi n-ekkel! $n = 2, 3, \ldots, 7$-re teljesül az állítás, ezen n-ek esetén $a_k = b_k$ minden k-ra.

Az első nemtriviális eset ($n = 8$) a következő a_k, b_k-kat adja: $a_2 = 3$ (mert $2^3 \leq 8$, de $2^4 > 8$); $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$ ($3^2 > 8$),

míg $b_2 = 2$ (mert $2^2 \leq 8$, de $3^2 > 8$); $b_3 = 2$ (mert $2^3 \leq 8$, de $3^3 > 8$); $b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 1$ ($2^4 > 8$), innen

$$a_2 + \ldots + a_8 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = b_2 + \ldots + b_8$$

valóban teljesül. 1 pont

Innen teljes indukciót fogunk alkalmazni.

• (Bázis): Mint láttuk az állítás $n \le 8$ esetén teljesül. 1 pont

•• (Indukciós feltevés): Tegyük fel, hogy n-ig minden nála nem nagyobb pozitív (1-nél nagyobb) egészre igaz az állítás (a későbbi használat miatt jelöljük ezen n esetén a_k, b_k-t $a_{n,k} = a_k$; $b_{n,k} = b_k$-val), azaz

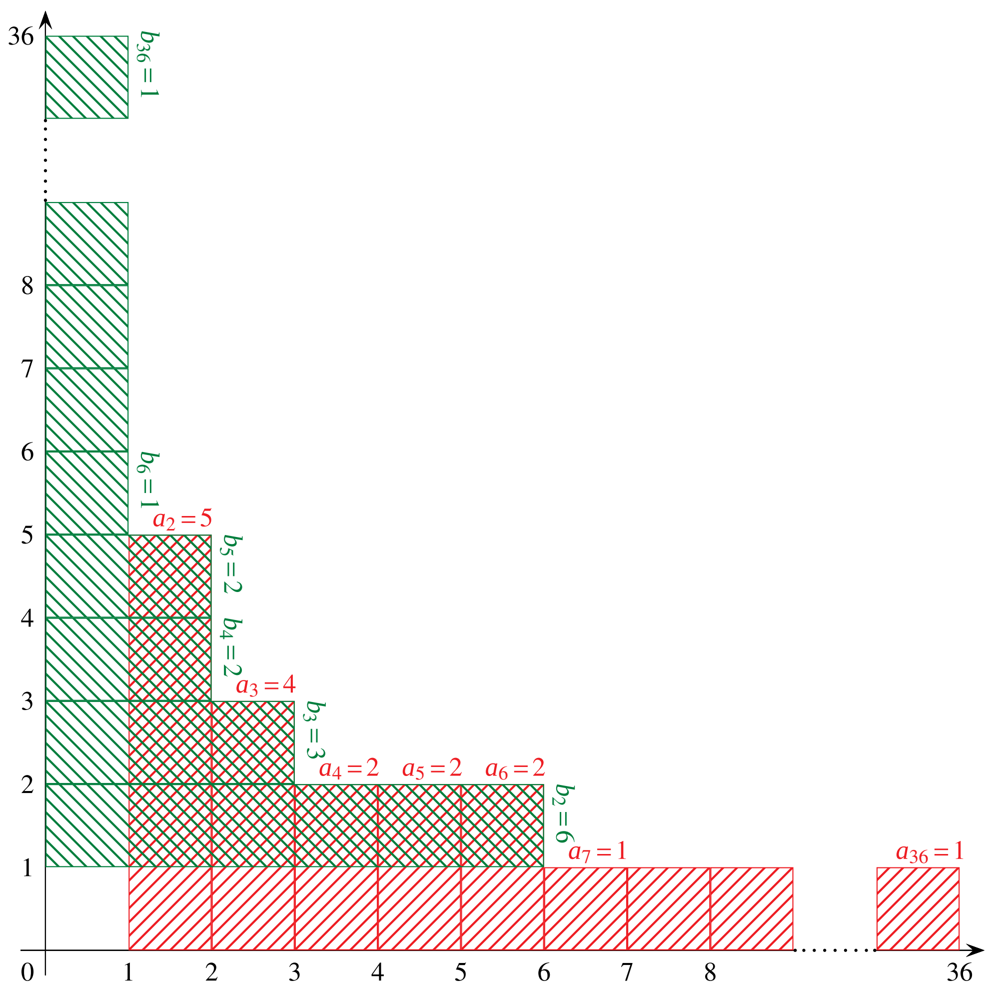
$$a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,n-1} + a_{n,n} = b_{n,2} + b_{n,3} + \ldots + b_{n,n-1} + b_{n,n}.$$ 1 pont

• • • (Lényegi vizsgálat): Vajon igaz marad-e az állítás $(n+1)$-re is, azaz (újra csak „dupla indexelést" használva) teljesül-e

$$a_{n+1,2} + a_{n+1,3} + \ldots + a_{n+1,n-1} + a_{n+1,n} + a_{n+1,n+1} = b_{n+1,2} + b_{n+1,3} + \ldots + b_{n+1,n-1} + b_{n+1,n} + b_{n+1,n+1}?$$

Nyilván $a_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1} = 1$, valamint $a_{n+1,m} \ge a_{n,m}$ és $b_{n+1,m} \ge b_{n,m}$.

Másfelől vizsgáljuk meg, mikor teljesül $a_{n+1,m} > a_{n,m}$, illetve mikor teljesül $b_{n+1,l} > b_{n,l}$! $a_{n+1,m} > a_{n,m}$ akkor és csak akkor, ha $n+1 = m^x$ valamely $x \in \mathbb{N}^+$ esetén, míg $b_{n+1,l} > b_{n,l}$ akkor és csak akkor, ha $n+1 = y^l$ valamely $y \in \mathbb{N}^+$ esetén. Azaz, ha $(n+1)$ nem teljes (1-nél nagyobb kitevős) hatvány, akkor az n-ről $(n+1)$-re lépés során a vizsgált egyenlet mindkét oldalát ($a_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1} = 1$ miatt) pontosan 1-gyel növeltük, azaz az egyenlőség megmarad. 1 pont



Másfelől viszont, ha $(n+1)$ teljes hatvány, például $n+1 = m^l$, akkor $a_{n+1,m} - a_{n,m} = b_{n+1,l} - b_{n,l} = 1$, azaz a bal oldalon minden olyan m indexhez, ahol növelünk $a_{n,m}$-hez képest (pontosan 1-gyel) egyértelműen hozzárendelhető a jobb oldalon egyetlen olyan l index, ahol szintén (pontosan 1-gyel) növelünk $b_{n,l}$-hez képest (és természetesen, ha $n+1$ többféleképpen is felírható teljes hatványként, akkor ez a párosítás minden ilyen hatvány-alakra különböző párokat jelent).

Ezzel megvagyunk, hiszen ezek szerint ha $(n+1)$ teljes hatvány, akkor is igaz, hogy ugyanannyival növeltük a bal oldalt, és a jobb oldalt az indukciós feltevésben szereplő egyenlő oldalakhoz képest. 3 pont

Ezzel a teljes indukciós bizonyítási séma értelmében készen vagyunk, a bizonyítandó állítás valóban igaz.

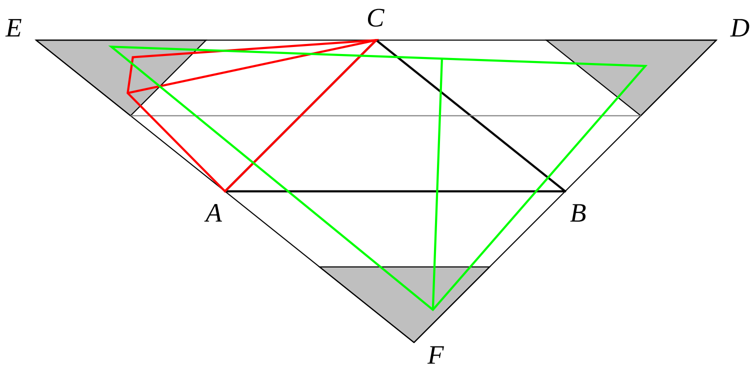
Összesen: **7 pont**

2. Adott $n \geq 3$ darab pont a síkon. Nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne. Válasszunk ki az összes lehetséges módon három pontot az adott pontok közül. Az így kapott háromszögek közül a legnagyobb területű területét jelöljük T-vel, a legkisebb területű területét t-vel. Tudjuk, hogy $\frac{T}{t} \leq 2$! Mely n értékekre valósulhat ez meg? **7 pont**

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $n < 6$. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy van 6 olyan pont, amelyre teljesül a feltétel. Tekintsünk egy maximális területű háromszöget, csúcsai legyenek A, B, C.

Az ABC háromszög belsejében nem lehet pont, mert akkor ezt a pontot A-val, B-vel, C-vel összekötve három olyan háromszöget kapunk, amelyek közül valamelyiknek a területe legfeljebb ABC területének harmada. 1 pont

Húzzunk párhuzamosokat mindhárom csúcson keresztül a szemközti oldallal, így egy, az eredetihez hasonló háromszöget kapunk. Nem lehet pont, amely e háromszögön kívül van, mert ekkor T-nél nagyobb területet kapnánk. 1 pont

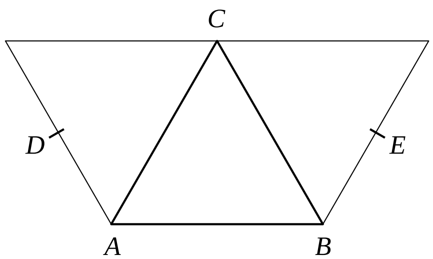


Húzzunk párhuzamosokat mindegyik oldallal az oldalhoz tartozó magasság felével a háromszöghöz képest kifelé. Pontunk csak ezeken a párhuzamosokon túl lehet! Az eddigieket összefoglalva újabb pontok csak a szürke háromszögekben lehetnek. 1 pont

Ha egy szürke háromszögben két pontunk van, akkor ezeket a közelebbi két csúccsal összekötve egy olyan nem hurkolt négyszöget kapunk (pirossal), amelynek területe kisebb, mint ABC területe. Ezt egy átlóval két háromszögre bontva, az egyik háromszög területe legfeljebb a négyszög területének fele, így kisebb mint ABC területének fele, ami nem lehet. 1 pont

Ha minden szürke háromszögbe egy pontunk esik, akkor azok egy zöld színnel jelölt háromszöget alkotnak. Húzzuk be ennek egyik legnagyobb szögének csúcsából induló magasságát, ami biztos, hogy a zöld háromszögön belül halad. Ezen magasság hossza legalább az ABC háromszög megfelelő magassága, az ábrán m_c, hiszen ez a magasság áthalad egy olyan sávon, amelynek szélessége m_c. 1 pont

A zöld magassághoz tartozó oldal hossza legalább akkora, mint az ABC háromszög c oldala. Egyszerre nem érhető el, hogy a zöld magasság egyenlő legyen m_c-vel és a zöld oldal egyenlő legyen c-vel, ezért a zöld háromszög területe nagyobb ABC területénél, ami ellentmondás. 1 pont



Öt pont esetén például egy szabályos háromszög csúcsai és a két oldalra rajzolt két szabályos háromszög oldalfelező pontjai megfelelők, azaz $n \leq 5$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Melyek azok a $b > 1$ pozitív egész számok, amelyekre bármely k pozitív egész szám esetén van olyan n pozitív egész, hogy az n^2 négyzetszám b-alapú számrendszerben felírt jegyeinek az összege éppen k? **7 pont**

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $b = 2$ jó, és csak ez a jó (alapszám). 1 pont

Kicsit kísérletezve bináris számrendszerben a következő látszódik:

- $n = 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow n^2 = 1 = 1_2$ a jegyösszeg: 1.
- $n = 2^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 = 9 = 1001_2$ a jegyösszeg: 2.
- $n = 2^3 - 1 = 7 \Rightarrow n^2 = 49 = 110001_2$ a jegyösszeg: 3.
- $n = 2^4 - 1 = 15 \Rightarrow n^2 = 225 = 11100001_2$ a jegyösszeg: 4.

Innen természetes a sejtés, hogy $n = 2^k - 1$ szám négyzete binárisan k jegyösszeget ad. Lássuk be!

$$n^2 = (2^k - 1)^2 = 2^{2k} - 2 \cdot 2^k + 1 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1 =$$
$$= \left(2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+2} + 2^{k+1} + 2^{k+1}\right) - 2^{k+1} + 1 = 2^{2k-1} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^{k+2} + 2^{k+1} + 1 =$$
$$= \underbrace{11\ldots1}_{k-1}\underbrace{00\ldots00}_{k}1,$$ 2 pont

ezzel megvagyunk, $b = 2$ jó választás.

Legyen most $b > 3$! ($b = 3$ a végén lesz elintézve.) Ismert, hogy b alapú számrendszerben a $(b-1)$-gyel oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha a szám jegyeinek összege osztható $(b-1)$-gyel (és ugyanez igaz arra, hogy mikor ad $(b-1)$-gyel osztva egy szám $1, 2, \ldots, b-2$ maradékot.) Vizsgáljuk a b-alapú számrendszerben a számokat, és nézzük meg, hogy $\pmod{b-1}$ milyen maradékot ad egy négyzetszám!

Egy n egész $\pmod{b-1}$ vizsgálva $0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\left[\frac{b}{2}\right]$ maradékot adhat $\Rightarrow$ n^2 így kevesebb, mint $(b-1)$ féle maradékot vehet fel, azaz *n^2 számjegyeinek összege nem lehet bármennyi $b(>3)$ alapú számrendszerben*.

(Ha például $b = 4$, akkor (mod 3) $0, 1, -1$ a lehetséges maradékok, és így $0, 1, 1$ a négyzetes maradékok, azaz nincs négyzetszám, ami $3k + 2$-alakú $\Leftrightarrow$ nincs négyzetszám, ami 4-es számrendszerben $2, 5, 8, \ldots$ jegyösszegű.) 2 pont

Már csak $b = 3$ van hátra. Azt mutatjuk meg, hogy $b = 3$ esetén nincs négyzetszám pontosan 3 jegyösszeggel.

Tegyük fel, hogy van olyan négyzetszám, aminek pontosan 3 a jegyösszege 3-as számrendszerben. Ekkor ez a szám a következő háromféle alakú lehet: $2\ldots1\ldots$ vagy $1\ldots2\ldots$ vagy $1\ldots1\ldots1\ldots$, ahol a $\ldots$-ok helyén néhány (esetleg 0 db) 0-s számjegy lehet.

Mindegyik esetet hasonlóan intézzük el. Vegyük a legkisebb olyan négyzetszámot, ami a három lehetséges alak közül előfordulhat. Egy ilyen négyzetszám végén nem állhat két darab 0, mert különben 9-cel osztva újra csak ilyen alakú négyzetszámot kapunk (szemben azzal, hogy a számunk a lehető legkisebb). Vagyis a lehetséges alakok:

$$2\ldots1, \quad 2\ldots10, \quad 1\ldots2, \quad 1\ldots20, \quad 1\ldots1\ldots1, \quad 1\ldots1\ldots10.$$

Egy 3-mal osztható négyzetszám 9-cel is osztható, azaz nem végződhet 1 darab 0-ra, illetve egy négyzetszám 3-mal osztva nem adhat 2 maradékot sem, a 6 potenciális alak közül marad kettő: $2\ldots1$ és $1\ldots1\ldots1$.

Ha az alak $n^2 = 2\ldots1 = 2 \cdot 3^m + 1$, akkor $2 \cdot 3^m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Ez nem lehet, mert vagy $4 \mid (n-1)(n+1)$, vagy $2 \nmid (n-1)(n+1)$.

Ha pedig az alak $n^2 = 1\ldots1\ldots1 = 3^{m+l} + 3^m + 1$, akkor $3^m(3^l + 1) = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. A bal oldal páros, tehát a jobb oldal is, azaz $2 \mid (n-1) \Rightarrow 8 \mid (n-1)(n+1) \Rightarrow 8 \mid 3^l + 1$.

Ez viszont nem lehet, mert a 3^l hatvány 1 vagy 3 maradékot ad 8-cal osztva, $3^l + 1$ pedig 2 vagy 4 maradékot ad 8-cal osztva. Azaz b 3 sem lehet!

Ezzel megvagyunk, a kérdéses számrendszer alapszám valóban csak $b = 2$ lehet! 2 pont

Összesen: 7 pont