Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
Kezdők I–II. kategória 2. forduló
Kezdők III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézban $AB \parallel CD$ és $AB \geq CD$. E és F a BC, illetve CD oldalak egy-egy belső pontja. Tudjuk, hogy $CE = CF$. Az EF egyenes az AD egyenest a G pontban metszi. Mekkorák a trapéz szögei, ha a DFG háromszög egyenlő szárú? **6 pont**

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén a következő számok között biztosan van legalább egy olyan, amelyik nem negatív: $4a^2 - 2b + 1$, $b^2 + 2c + 4$, és $c^2 - 8a + 1$. **8 pont**

3. Egy iskola igazgatója összehívta az osztályok küldöttjeit (összesen 32 tanulót), hogy választ kapjon az alábbi kérdésekre:

a) Kezdődjön-e fél órával később a tanítás?
b) Jó lenne-e, ha a testnevelés órák a tízórai szünet előtt lennének megtartva?
c) Szeretnék-e a tanulók, ha a rajzórák szerdánként lennének?

A szavazásról a következőket tudjuk. A korai testnevelés órákat csak 16-an támogatták, az első kérdésre 17, míg a harmadikra 25 igen szavazat érkezett. Az első kérdésre igennel válaszolók közül 8-an nem akartak korán tornázni, 6-an pedig szerdán rajzolni. Azok, akik a második és harmadik kérdésre is igennel válaszoltak 12-en voltak, de ennek a társaságnak a fele nem szerette volna, ha a tanítás később kezdődik. Hány küldött szavazott minden kérdésre igennel? Hányan szavaztak minden kérdésre nemmel? **8 pont**

4. Az osztály matematika órán a faktoriális fogalmát tanulta: egy n pozitív egész szám faktoriálisa az n-nél nem nagyobb pozitív egészek szorzatát jelenti, jelölése $n!$. Kiszámolták 1-től 20-ig a pozitív egész számok szorzatát, majd a kapott 19-jegyű számot felírták a táblára. Szünetben azonban valaki letörölt néhány számjegyet, így most a táblán a következő egyenlőség látható:

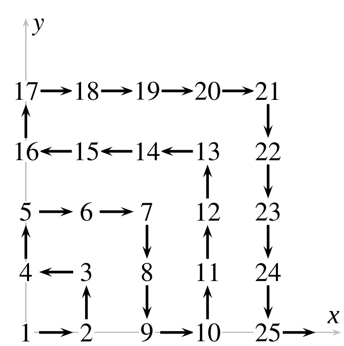
$$20! = 243290200\square1766\square\square\square\square\square,$$

ahol a $\square$-ek helyén álló számjegyek már nem olvashatóak. **8 pont**

Határozd meg a hiányzó számjegyeket a szorzat kiszámolása nélkül!

5. Az első síknegyedben a $(0;0)$ pontból kiindulva sorra vesszük az egész koordinátájú pontokat az ábra szerint. (Tehát például a $(2;1)$ pont a 8-as sorszámot kapja.)

a) Határozd meg a $(12;2017)$ pont sorszámát!
b) Melyik ponthoz rendeljük a 2018-as sorszámot?



10 pont