Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

1999/2000 10. évfolyam 2. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Határozzuk meg az

$$\left||x+1|+|x-2|-x^2\right|=2$$

egyenletet kielégítõ valós *x* értékeket!

2. feladat

Legyen *P* az *ABC* szabályos háromszög köré írható körének egy olyan pontja, amire az *AP* szakasz a *BC* oldalt egy belsõ *Q* pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}.$$

3. feladat

A 2-nek melyik legnagyobb pozitív egész kitevõjû hatványával osztható $1999^{2000}-1$?

4. feladat

Egy 1999-szer 2000-es téglalap alakú táblázat minden mezõjében a (-1) vagy az 1 szám áll. Egy-egy alkalommal bármelyik sorban vagy oszlopban megváltoztathatjuk az összes szám elõjelét.

Bizonyítsuk be, hogy az adott „mûvelet" véges sokszori alkalmazásával elérhetõ,

a) hogy a táblázatban lévõ számok összege legalább 2000 legyen;

b) hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege nemnegatív legyen.