A 1999/2000. Arany Dániel MATEMATIKA I.Forduló /kezdők/ feladatmegoldásai

1. Mi lehet az a természetes szám, amely négyzetszám lesz, ha hozzáadunk 5-öt, de négyzetszám lesz akkor is, ha elveszünk belőle 11-et?

/6 pont/

Megoldás:

A keletkezett négyzetszámokat jelöljük x^2-tel, illetve y^2-tel. Ekkor a négyzetszámok közti különbség 16, tehát $x^2-y^2=16$, szorzattá alakítva $(x+y)(x-y)=16$. /1 pont/

Mivel x, y természetes szám, ezért $x+y\geq x-y$, az $x+y>0$ és a szorzat is pozitív , ezért $x-y>0$

/1 pont/

A lehetséges szorzatok:16×1; 8×2; 4×4.

Ha $x+y=16$; $x-y=1$, akkor $2x=17$, $x=8,5$ és ez nem természetes szám, tehát nincs megoldása a feladatnak. /1 pont/

Ha $x+y=8$; $x-y=2$, akkor $2x=10$, $x=5$ és $y=3$, így a négyzetszámok $x^2=25$, $y^2=9$, a keresett szám pedig 20. /1 pont/

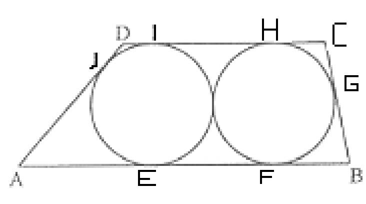
Ha $x+y=4$; $x-y=4$, akkor $2x=8$, $x=y=4$, így a négyzetszámok $x^2=16$, $y^2=0$, a keresett szám pedig 11. /1 pont/

Ha a keresett szám 20, akkor $20+5=5^2$ és $20-11=3^2$, ha pedig a keresett szám 11, akkor $11+5=4^2$és $11-11=0^2$. Tehát a keresett szám 20 és 11, és mindkettő megfelel a feladat feltételeinek. /1 pont/

2. Egy ABCD trapézban az alapok összege 10, a szárak összege pedig 6 hosszúságegység. Tudjuk, hogy van két olyan kör, melyek érintik egymást, az alapokat, és egy-egy szárat is. Számítsa ki a körök sugarát!

/6 pont/

Megoldás:



Mivel a körök érintik mindkét alapot, átmérőjük a trapéz magassága, ezért sugaraik egyenlők. Ekkor nyilván csak kívülről érinthetik egymást. /1 pont/

Körhöz külső pontból húzott két érintőszakasz egyenlő, ezért CG=CH és BG=BF. /1 pont/

Tehát BC=BF+CH és hasonlóan belátható, hogy AD=AE+DI, azaz AE+BF+CH+DI=BC+AD=6. /1 pont/

A körök és a trapéz alapjainak érintkezése miatt keletkező EFHI négyszög szögei derékszögek, tehát a négyszög téglalap. A téglalapnak a körök középpontjai által meghatározott középvonala és az erre merőleges oldalai egyaránt a körök átmérőjével egyenlők, ezért az EFHI téglalap négyzet. /2 pont/

Így IH+EF=4r=10-6=4, tehát a körök sugara 1 hosszúságegység. /1 pont/

3. Bizonyítsa be, hogy három egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy egész szám harmadik hatványa!

/8 pont/

<u>Első megoldás:</u>

A három egymást követő pozitív egész szám szorzata: $n(n+1)(n+2)$, ahol $n \in N^+$ /1 pont/

$n(n+l)(n+2)=n^3+3n^2+2n$ /1 pont/

$n^3+3n^2+2n=(n+1)^3-(n+1)$ /3 pont/

$(n+1)^3-(n+1)<(n+1)^3$/1 pont/

Másrészt $n^3<n^3+3n^2+2n$ /1 pont/

Ezért $n^3<n(n+1)(n+2)<(n+1)^3$

Két egymást követő köbszám között nem lehet köbszám, ezzel beláttuk a feladat állítását. /1 pont/

<u>Második megoldás:</u>

A három egymást követő pozitív egész szám szorzata: $n(n+1)(n+2)$, ahol $n \in N^+$ /1 pont/

Ekkor $n<n+1n+2$
Ezért $n^3<n\cdot(n+1)(n+2)(n+2)^3$ /4 pont/

Ha a három egymást követő pozitív egész szám szorzata köbszám lenne, akkor ez csak $(n+1)^3$ lehetne. /1 pont/

Mivel $n(n+l)(n+2)=n^3+3n^2+2n$ és $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ tehát a három egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet egyenlő $(n+1)^3$-nel , ezzel beláttuk a feladat állítását. /2 pont/

4. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely (a tízes számrendszerben) csak 0 és 1-es számjegyekből áll és osztható 792-vel!

/10 pont/

<u>Megoldás:</u>

$792=8\cdot9\cdot11$, ahol 8, 9, és 11 páronként relatív prímek. /1 pont/

Így a keresett számnak 8-cal, 9-cel, és 11-gyel oszthatónak kell lennie. /1 pont/

A keresett szám utolsó három számjegye 000, 001, 100, 101, 010, 011, 110, 111 lehet, mivel a szám 8-cal osztható, ezért 000-ra kell végződnie. /2 pont/

A keresett szám osztható 9-cel, ezért a keresett szám $n \cdot 9$ darab /$n \in N^+$/1-es számjegyet tartalmaz. /2 pont/

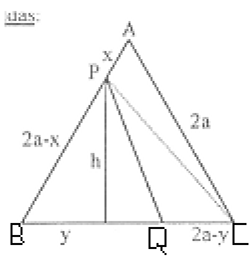
A keresett szám osztható 11-gyel, ezért számjegyeinek előjeles összege /a_1-a_2+a_3-a_4+.../ is osztható 11-gyel. 9 darab 1-es számjegy ennek a feltételnek nem felel meg, tehát a legkisebb ilyen szám legalább 18 darab l-es számjegyet tartalmaz. /2 pont/

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő szám, 21 jegyű: $\underbrace{111\ldots1}_{18db}000$ /2 pont/

5. Adott az ABC szabályos háromszög. Melyek azok az egyenesek, amelyek ezt a háromszöget két olyan síkidomra bontják, amelyeknek kerülete és területe is egyenlő?

/10 pont/

<u>Megoldás:</u>



Az ABC háromszög három magasságvonala megfelel a feltételnek. /2 pont/

Nézzük meg, hogy van-e más egyenes is! Vezessük be a következő jelöléseket: a háromszög oldalainak hossza 2a, P az AB oldal egy belső pontja, Q a BC oldal egy B-től különböző pontja.

Legyen PA=x, BQ=y, és jelöljük P-nek a BC oldaltál való távolságát h-val, továbbá a háromszög magasságainak hosszát m-mel.
A PBQ háromszög és a QCAP négyszög egyenlő kerületű, ezért (2a-x)+y+PQ=(2a-y)+2a+x+PQ, tehát y=x+a /2 pont/

A PBQ háromszög és a QCAP négyszög területe is egyenlő, ezért: $\frac{1}{2}yh=\frac{1}{2}\cdot(2a-y)h+\frac{1}{2}\cdot xm$

Behelyettesítve az y=x+a kifejezést: (x+a)h=(a-x)h+xm. A P pont az AB oldal egy belső pontja volt, így x>0.
Ekkor az előző egyenletből következik, hogy h=0,5 m /4 pont/

Tehát a P pont az AB oldal felezőpontja lesz, s ezért x=a, y=2a, vagyis Q egybeesik C-vel. Ezért csak a három magasságvonal egyenese teljesíti a feladat feltételeit. /2 pont/