



Language: **Hungarian**

Day: **1**

2016. április 12., kedd

**1. Feladat** Legyen  $n$  páratlan pozitív egész. Jelöljön  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nemnegatív valós számokat. Mutassuk meg, hogy

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

teljesül, ahol  $x_{n+1} = x_1$ .

**2. Feladat** Az  $ABCD$  húrnégyszögben jelölje  $X$  az  $AC$  és  $BD$  átlók metszéspontját. Legyen továbbá  $C_1, D_1$  és  $M$  pont rendre a  $CX, DX$  és  $CD$  szakaszok felezőpontja. Az  $AD_1$  és  $BC_1$  egyenesek  $Y$  pontban metszik egymást,  $MY$  egyenes metszéspontja  $AC$  illetve  $BD$  átlókkal  $E$  illetve  $F$  pontok, amik nem esnek egybe. Igazoljuk hogy az  $XY$  egyenes érinti az  $E, F$  és  $X$  pontokon áthaladó kört.

**3. Feladat** Legyen  $m$  pozitív egész és tekintsünk egy  $4m \times 4m$ -es, egységnégyzetekből álló táblázatot. Ha a táblázat két különböző mezője közös sorban vagy közös oszlopban van, akkor azt mondjuk, hogy *kapcsolatban állnak*. Önmagával semelyik mező nem áll kapcsolatban. Miután néhány mezőt kékre színeztünk, teljesül, hogy minden mező legalább két kék mezővel kapcsolatban áll. Határozzuk meg a kék mezők számának minimumát.