2006. július 12.

1. Feladat Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I. A háromszög P belső pontja kielégíti a

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle$$

egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $AP \geqslant AI$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $P = I$.

2. Feladat Legyen P egy szabályos 2006-szög. P egy átlóját *jó*nak nevezzük, ha a végpontjai P határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike P páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén *jó*nak nevezzük.

Tegyük fel, hogy P-t háromszögekre bontottuk 2003 olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja P belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.

3. Feladat Határozzuk meg a legkisebb olyan M valós számot, amire az

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leqslant M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden a, b, c valós számra.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2006. július 13.

4. Feladat Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló (x, y) számpárt, amire teljesül

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. Feladat Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós, $n > 1$ fokú polinom, és legyen k egy pozitív egész. Tekintsük a $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ polinomot, ahol P k-szor fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab olyan t egész szám van, amire $Q(t) = t$.

6. Feladat Egy P konvex sokszög mindegyik b oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala b és ami benne van P-ben. Bizonyítsuk be, hogy a P oldalaihoz rendelt területek összege legalább a kétszerese P területének.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.