

2006. július 12.

**1. Feladat** Az  $ABC$  háromszög beírt körének középpontja legyen  $I$ . A háromszög  $P$  belső pontja kielégíti a

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy  $AP \geq AI$ , és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $P = I$ .

**2. Feladat** Legyen  $P$  egy szabályos 2006-szög.  $P$  egy átlóját *jónak* nevezzük, ha a végpontjai  $P$  határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike  $P$  páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén *jónak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy  $P$ -t háromszögekre bontottuk 2003 olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja  $P$  belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.

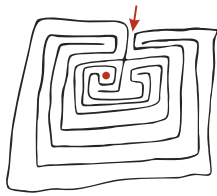
**3. Feladat** Határozzuk meg a legkisebb olyan  $M$  valós számot, amire az

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden  $a, b, c$  valós számra.

*Munkaidő: 4 és fél óra.*

*Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.*



2006. július 13.

**4. Feladat** Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló  $(x, y)$  számpárt, amire teljesül

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**5. Feladat** Legyen  $P(x)$  egy egész együtthatós,  $n > 1$  fokú polinom, és legyen  $k$  egy pozitív egész. Tekintsük a  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$  polinomot, ahol  $P$   $k$ -szor fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb  $n$  darab olyan  $t$  egész szám van, amire  $Q(t) = t$ .

**6. Feladat** Egy  $P$  konvex sokszög mindegyik  $b$  oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala  $b$  és ami benne van  $P$ -ben. Bizonyítsuk be, hogy a  $P$  oldalaihoz rendelt területek összege legalább a kétszerese  $P$  területének.

*Munkaidő: 4 és fél óra.*

*Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.*