2010. július 7., szerda

1. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre az

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$$

egyenlőség teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re. (Itt $[z]$ a legnagyobb olyan egész számot jelöli, amely kisebb vagy egyenlő z-nél.)

2. feladat. Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, Γ pedig a háromszög körülírt köre. Az AI egyenes másik metszéspontja a Γ körrel legyen D. Legyen E a $\widehat{BDC}$ körív egy pontja, F pedig a BC szakasz egy pontja, amelyekre teljesül

$$BAF\sphericalangle = CAE\sphericalangle < \tfrac{1}{2}BAC\sphericalangle.$$

Legyen továbbá G az IF szakasz középpontja. Bizonyítsuk be, hogy a DG és EI egyenesek a Γ körön metszik egymást.

3. feladat. Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

teljes négyzet minden $m, n \in \mathbb{N}$-re.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2010. július 8., csütörtök

4. feladat. Legyen P egy pont az ABC háromszög belsejében. Az AP, BP és CP egyenesek másik metszéspontja az ABC háromszög Γ körülírt körével legyen rendre K, L és M. A Γ körhöz C pontban húzott érintő messe az AB egyenest az S pontban. Tegyük fel, hogy $SC = SP$. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

5. feladat. A $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ dobozok mindegyikében kezdetben egy érme van. Kétféle megengedett lépés van:

1. *típusú lépés*: Választunk egy B_j nemüres dobozt, ahol $1 \leq j \leq 5$. Elveszünk egy érmét a B_j dobozból, és hozzáadunk két érmét a B_{j+1} dobozhoz.
2. *típusú lépés*: Választunk egy B_k nemüres dobozt, ahol $1 \leq k \leq 4$. Elveszünk egy érmét a B_k dobozból, és kicseréljük a B_{k+1} (esetleg üres) doboz tartalmát a B_{k+2} (esetleg üres) doboz tartalmával.

Állapítsuk meg, hogy ilyen lépések valamilyen véges sorozata segítségével elérhető-e, hogy a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 dobozok mindegyike üres legyen, a B_6 doboz pedig pontosan $2010^{2010^{2010}}$ érmét tartalmazzon. (Definíció szerint $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6. feladat. Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív valós számok egy sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan s pozitív egész, amellyel

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

teljesül minden $n > s$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan ℓ és N pozitív egészek, amikre $\ell \leq s$, és $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ minden $n \geq N$-re.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.