2013. július 23., kedd

1. Feladat Bizonyítsuk be, hogy bármilyen pozitív egész k és n számok esetén található k (nem feltétlenül különböző) pozitív egész: $m_1, m_2, \ldots, m_k$, amikre

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

2. Feladat A sík 4027 pontjából álló alakzatot *kolumbiai*nak nevezzük, ha 2013 pontja pirosra, a többi 2014 kékre van színezve, és az alakzat semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Néhány egyenese meghúzásával a síkot tartományokra bontjuk. Az egyeneseknek ezt az elrendezését a kolumbiai alakzatra nézve *jó*nak nevezzük, ha a következő két feltétel teljesül:

- semelyik egyenes sem megy át az alakzat semelyik pontján sem;
- nincs olyan tartomány, amelyik mindkét színű pontot tartamaz.

Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket, amire igaz az, hogy 4027 pontból álló bármely kolumbiai alakzatra van k egyenesből álló *jó* elrendezés.

3. Feladat Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt köre érintse a BC oldalt az A_1 pontban. Hasonlóan definiáljuk a CA oldal B_1 pontját, ill. az AB oldal C_1 pontját a B-vel, ill. C-vel szemközti hozzáírt körök segítségével. Tegyük fel, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt körének a középpontja az ABC háromszög körülírt körén fekszik. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű.

Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt kör*e az a kör, ami érinti a BC szakaszt, továbbá az AB félegyenes B-n túli részét és az AC félegyenes C-n túli részét. Hasonlóan vannak definiálva a B, ill. a C csúccsal szemközti hozzáírt körök.*

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2013. július 24., szerda

4. Feladat Legyen az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H, és legyen W a BC oldal egy belső pontja. A B-ből, ill. C-ből induló magasságok talppontjai legyenek M, ill. N. Jelölje ω_1 a BWN háromszög körülírt körét, és legyen X az ω_1 kör azon pontja, amire WX ω_1-nek átmérője. Hasonlóan, jelölje ω_2 a CWM háromszög körülírt körét, és legyen Y az ω_2 kör azon pontja, amire WY ω_2-nek átmérője. Bizonyítsuk be, hogy az X, Y és H pontok egy egyenesen fekszenek.

5. Feladat Jelölje $\mathbb{Q}_{>0}$ a pozitív racionális számok halmazát. Legyen $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, ami kielégíti az alábbi három feltételt:

(i) Minden $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$-ra $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) Minden $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$-ra $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) Létezik olyan $a > 1$ raconális szám, amire $f(a) = a$.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x$ minden $x \in \mathbb{Q}_{>0}$-ra.

6. Feladat Legyen $n \geq 3$ egész szám, és tekintsünk egy kört, amit $n+1$ ponttal egyenlő hosszúságú ívekre osztottunk. Tekintsük ezeknek a pontoknak a $0, 1, \ldots, n$ számokkal való összes olyan számozását, ahol minden számot pontosan egyszer használtunk; két ilyen számozást azonosnak tekintünk, ha egyiket a másikból megkaphatjuk a kör egy elforgatásával. Egy számozást *szép*nek nevezünk, ha bármely négy $a < b < c < d$ számra, amikre $a + d = b + c$, fennáll az, hogy az a és d jelű pontokat összekötő húr nem metszi a b és c jelű pontokat összekötő húrt.

Legyen M a szép számozások száma, és legyen N a pozitív egészekből álló olyan (x, y) rendezett párok száma, amikre $x + y \leq n$ és $\operatorname{lnko}(x, y) = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$M = N + 1.$$

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.