

2013. július 23., kedd

**1. Feladat** Bizonyítsuk be, hogy bármilyen pozitív egész  $k$  és  $n$  számok esetén található  $k$  (nem feltétlenül különböző) pozitív egész:  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , amikre

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

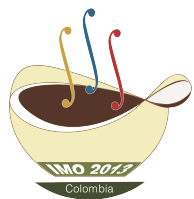
**2. Feladat** A sík 4027 pontjából álló alakzatot *kolumbiainak* nevezzük, ha 2013 pontja pirosra, a többi 2014 kékre van színezve, és az alakzat semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Néhány egyenese meghúzásával a síkot tartományokra bontjuk. Az egyeneseknek ezt az elrendezését a kolumbiai alakzatra nézve *jónak* nevezzük, ha a következő két feltétel teljesül:

- semelyik egyenes sem megy át az alakzat semelyik pontján sem;
- nincs olyan tartomány, amelyik mindkét színű pontot tartamaz.

Határozzuk meg a legkisebb olyan  $k$  értéket, amire igaz az, hogy 4027 pontból álló bármely kolumbiai alakzatra van  $k$  egyenesből álló *jó* elrendezés.

**3. Feladat** Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúccsal szemközti hozzáírt köre érintse a  $BC$  oldalt az  $A_1$  pontban. Hasonlóan definiáljuk a  $CA$  oldal  $B_1$  pontját, ill. az  $AB$  oldal  $C_1$  pontját a  $B$ -vel, ill.  $C$ -vel szemközti hozzáírt körök segítségével. Tegyük fel, hogy az  $A_1B_1C_1$  háromszög körülírt körének a középpontja az  $ABC$  háromszög körülírt körén fekszik. Bizonyítsuk be, hogy az  $ABC$  háromszög derékszögű.

*Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúccsal szemközti hozzáírt köre az a kör, ami érinti a  $BC$  szakaszt, továbbá az  $AB$  félegyenes  $B$ -n túli részét és az  $AC$  félegyenes  $C$ -n túli részét. Hasonlóan vannak definiálva a  $B$ , ill. a  $C$  csúccsal szemközti hozzáírt körök.*



2013. július 24., szerda

**4. Feladat** Legyen az  $ABC$  hegyesszögű háromszög magasságpontja  $H$ , és legyen  $W$  a  $BC$  oldal egy belső pontja. A  $B$ -ből, ill.  $C$ -ből induló magasságok talppontjai legyenek  $M$ , ill.  $N$ . Jelölje  $\omega_1$  a  $BWN$  háromszög körülírt körét, és legyen  $X$  az  $\omega_1$  kör azon pontja, amire  $WX$   $\omega_1$ -nek átmérője. Hasonlóan, jelölje  $\omega_2$  a  $CWM$  háromszög körülírt körét, és legyen  $Y$  az  $\omega_2$  kör azon pontja, amire  $WY$   $\omega_2$ -nek átmérője. Bizonyítsuk be, hogy az  $X$ ,  $Y$  és  $H$  pontok egy egyenesen fekszenek.

**5. Feladat** Jelölje  $\mathbb{Q}_{>0}$  a pozitív racionális számok halmazát. Legyen  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, ami kielégíti az alábbi három feltételt:

- (i) Minden  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ -ra  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) Minden  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ -ra  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) Létezik olyan  $a > 1$  racionális szám, amire  $f(a) = a$ .

Bizonyítsuk be, hogy  $f(x) = x$  minden  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ -ra.

**6. Feladat** Legyen  $n \geq 3$  egész szám, és tekintsünk egy kört, amit  $n + 1$  ponttal egyenlő hosszúságú ívekre osztottunk. Tekintsük ezeknek a pontoknak a  $0, 1, \dots, n$  számokkal való összes olyan számozását, ahol minden számot pontosan egyszer használtunk; két ilyen számozást azonosnak tekintünk, ha egyiket a másiktól megkaphatjuk a kör egy elforgatásával. Egy számozást *szépnek* nevezünk, ha bármely négy  $a < b < c < d$  számra, amikre  $a + d = b + c$ , fennáll az, hogy az  $a$  és  $d$  jelű pontokat összekötő húr nem metszi a  $b$  és  $c$  jelű pontokat összekötő húr.

Legyen  $M$  a szép számozások száma, és legyen  $N$  a pozitív egészekből álló olyan  $(x, y)$  rendezett párok száma, amikre  $x + y \leq n$  és  $\text{lnc}(x, y) = 1$  teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$M = N + 1.$$