SZAKKÖZÉPISKOLA

A 2005-2006. tanévi matematika OKTV I. kategória első (iskolai) fordulójának feladatai

1. feladat

Melyek azok az a,b,c egész számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = a + b + c + a \cdot b \cdot c$$

Megoldás:

A feladatbeli egyenletből ekvivalens átalakítások során a következőket kapjuk:

$$a \cdot (b-1) + c \cdot (b-1) = b - a \cdot c + a \cdot b \cdot c,$$

illetve

$$(b-1) \cdot (a+c) = b + a \cdot c \cdot (b-1),$$

végül

(1) $$(b-1) \cdot (a + c - a \cdot c) = b$$ (2 pont)

vegyünk el (1) mindkét oldalából1-et, így

$(b-1) \cdot (a + c - a \cdot c) - 1 = b - 1,$

amelyből következik, hogy

(2) $$(b-1) \cdot (a + c - a \cdot c - 1) = 1$$

(2) bal oldala három tényező szorzatára bontható:

(3) $$(b-1) \cdot (a-1) \cdot (1-c) = 1$$ (2 pont)

Mivel a,b,c,$\in$ Z, ezért a-1,b-1 és 1-c is egész számok (1 pont)

A (3) egyenlet kétféleképpen teljesülhet:

- mindhárom bal oldali zárójeles kifejezés értéke 1,
  ekkor a=2, b=2, c=0. (2 pont)
- A három bal oldali kifejezés közül kettő (-1)-gyel egyenlő,
  a harmadik értéke 1.
  Ebben az esetben,

  ha a-1=-1, b-1=-1 és 1-c=1, akkor a=b=c=0.

  ha a-1=-1, b-1=1 és 1-c=-1, akkor a=0, b=2, c=2.

  végül, ha a-1=1, b-1=-1 és 1-c=-1, akkor a=2, b=0, c=2. (2 pont)

A feladat megoldása tehát az a=b=c=0 számhármas, valamint az a=2, b=2, c=0 számhármas és annak összes permutációja, vagyis összesen négy megoldás van.
A megoldások helyességét ellenőrizhetjük behelyettesítéssel is. (1pont)

Összesen: 10 pont

2. feladat

Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x^4 - 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x + 1 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy az x=0 nem gyöke az egyenletnek, hiszen akkor az egyenlet két oldalának értéke különböző. (1 pont)

Osszuk el ezért az egyenlet mindkét oldalát x^2-tel! Ekkor a kiinduló egyenlettel ekvivalens

$$x^2 - 3 \cdot x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{, majd az}$$

(1) $$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 \cdot (x - \frac{1}{x}) = 0$$ (2 pont)

egyenletet kapjuk.

Helyettesítsük az $x - \frac{1}{x}$ kifejezést a-val, ezzel $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

Így (1) a következő alakú lesz:

(2) $$a^2 - 3 \cdot a + 2 = 0.$$ (3 pont)

a (2) egyenlet megoldásai: $a_1=1$ és $a_2=2$. (1 pont)

ha $x - \frac{1}{x} = 1$, akkor az ebből adódó $x^2-x-1=0$ egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ és } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$ (1 pont)

Ha pedig $x - \frac{1}{x} = 2$, akkor az innen származó $x^2-2x-1=0$ egyenlet megoldásai:

$$x_3 = 1 + \sqrt{2} \text{ és } x_4 = 1 - \sqrt{2}$$ (1 pont)

átalakításaink ekvivalensek voltak, tehát a valós számok valóban gyökei az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Összesen: (10 pont)

3. feladat

Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalain vegyük fel rendre a D,E,F pontokat úgy, hogy teljesüljön a

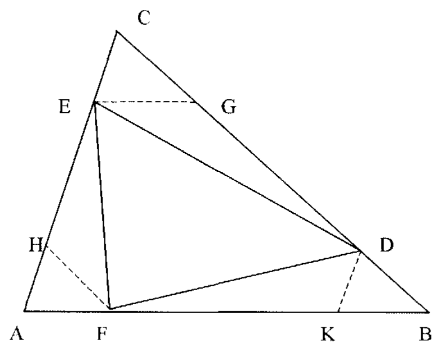
$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$

egyenlőség!

Jelölje az ABC háromszög kerületét k, a DEF háromszög kerületét k_1! Bizonyítsa be, hogy $k_1 < \frac{3}{4}k$!

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók, a D,G és E,H valamint az F,K pontok a megfelelő oldalak negyedelő pontjai.



A BC=a, CA=b, AB=c jelöléssel, a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján belátható, hogy FH párhuzamos BC-vel, DK párhuzamos CA-val és EG párhuzamos AB-vel, továbbá

(1) $FH = \frac{a}{4}$; $DK = \frac{b}{4}$; $EG = \frac{c}{4}$. (3 pont)

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy

(2) $DG = \frac{a}{2}$; $EH = \frac{b}{2}$; $FK = \frac{c}{2}$. (1 pont)

Felhasználva az (1) és (2) pontbeli eredményeinket, a DGE, EHF és FKD háromszögekre felírhatjuk a háromszög egyenlőtlenségeket:

(3) $\frac{a}{2} + \frac{c}{4} > DE$

(4) $\frac{b}{2} + \frac{a}{4} > EF$

(3) $\frac{c}{2} + \frac{b}{4} > FD$ (3 pont)

Összeadva (3)-(4)-(5) megfelelő oldalait, megkapjuk:

$$\frac{3}{4}(a + b + c) > DE + EF + FD,$$

azaz $\frac{3}{4}k > k_1$ (3 pont)

ezzel állításunkat bizonyítottuk.

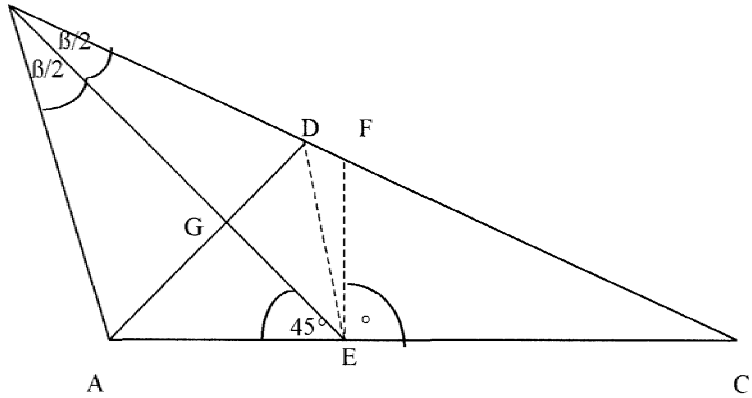
Összesen: 10 pont

4. feladat

Legyen az ABC háromszögben az A csúcsból húzott magasságvonal és a BC oldal metszéspontja D, A B pontból induló belső szögfelező és az AC oldal metszéspontja E. Mekkora az EDC szög nagysága, ha AEB$\angle = 45^o$?

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók, az F pont az E pontban az AC oldalra rajzolt merőleges egyenes és a BC oldal metszéspontja.



1. ábra

Mivel AEB$\angle = 45^o$, azért, BEF$\angle = 45^o$ hiszen EF merőleges AC-re. (1 pont)

Ebből következik, hogy a BAE háromszög egybevágó a BFE háromszöggel, mert a közös BE oldalon egyenlő szögek vannak. Eszerint:

(1) AE=FE (2 pont)

Vegyük figyelembe, hogy az AEFD négyszög E illetve D csúcsánál egymással szemben levő szögek derékszögek, így az AEFD négyszög húrnégyszög.

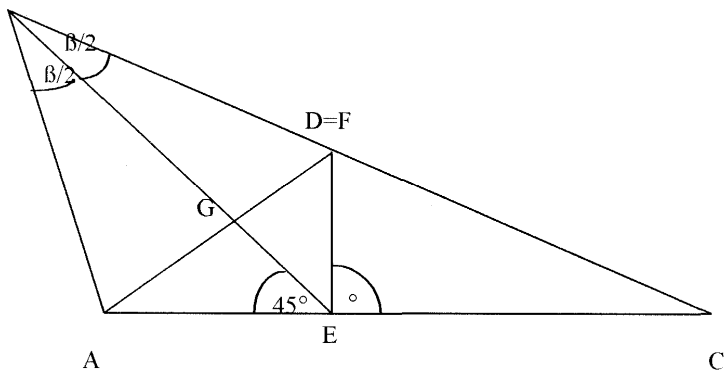
Az AEFD húrnégyszögben AE és FE húrokhoz (1) szerint egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, mégpedig:

(2) $$\text{ADE}\angle = \text{EDF}\angle = \frac{ADF\angle}{2} = 45^o.$$ (3 pont)

(2)-ből rögtön következik, hogy

EDC$\angle = 45^o$ (2 pont)

Ha a D és az F pont egybeesne, akkor az AEFD négyszög helyett az AED háromszög jönne létre (2.ábra)



2.ábra

A BAE és a BFE háromszögek most is egybevágók. Ezért (1) ismét teljesül.

Mivel BEF$\angle = 45^o$ ezért az AEG és DEG háromszögek két-két oldal és DEG háromszögek két-két oldal és a közbezárt szögek egyenlősége miatt egybevágók. Ekkor azonban AGE$\angle$= EGD$\angle$= BGD$\angle$= 90^{o} lenne, vagyis a BGD háromszögben két derékszög jönne létre. Ez nyilván nem lehetséges, ezért a D és az F pont nem eshet egybe.

A feltételeknek megfelelő szög tehát: EDC$\angle$= 45^{o} (2 pont)

Összesen: 10 pont

5. feladat

Legfeljebb hány háromszög teljesíti az alábbi feltételek mindegyikét:

- tompaszögűek,
- oldalaik hossza centiméterben mérve egész szám,
- oldalaik hossza centiméterben mérve egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja,
- közülük semelyik kettő nem egybevágó?

Fejezze ki a háromszögek számát a számtani sorozat különbségével!

Megoldás:

Jelöljük a számtani sorozat különbségét d-vel, a háromszög oldalait a,b,c-vel.
Feltehetjük, hogy a<b<c, egyenlőség nem lehetséges, mert d>0.
Ekkor:

(1) $a=b-d$ és $c=b+d$.

Az oldalak centiméterben mérve egész számok, így d is pozitív egész szám. (1 pont)
Mivel mindegyik háromszög tompaszögű, azért (a szokásos jelölésekkel) a koszinusztételből:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} < 0 \text{, ahonnan:}$$

(2) $a^2+b^2<c^2$ következik. (2 pont)

(1) és (2) összevetéséből kapjuk, hogy

$$(b-d)^2+b^2<(b+d)^2,$$

amelyből a rendezés után:

(3) $b\cdot(b-4\cdot d)<0$ adódik. (1 pont)

(3) bal oldalán egy olyan, b-ben másodfokú polinom áll, amelynek zérushelyei 0 és 4d. (1 pont)

Ezért figyelembe véve, hogy 4d>0

(4) $0<b<4d$. (1 pont)

A háromszög-egyenlőtlenség miatt a+b>c, azaz

$b-d+b>b+d$, ebből

(5) $b>2d$. (1 pont)

(4) és (5) együttesen azt jelentik, hogy

(6) $2d<b<4d$ $(b,d\in N^{+})$ (1 pont)

(6) szerint b lehetséges értékei a következők:

(7) $2d+1;\ 2d+2;\dots\ 4d-2;\ 4d-1$.

(7)-nek pontosan 2d-1 darab háromszög felel meg. Mivel ezek a hosszúságukat tekintve a középső oldalukban különböznek, ezért nincs közöttük két egybevágó.

A keresett háromszögek száma tehát 2d-1. (2 pont)

Összesen: 10 pont

6. feladat

A valós számok halmazán értelmezett másodfokú f(x) függvény minden x számra eleget tesz a

$$3\cdot f(x)+f(2-x)=x^2$$

egyenlőségnek.

Hány olyan, 2005-nél nem nagyobb x természetes szám van, amelyre igaz, hogy

$$f(x)>\frac{13}{4}\ ?$$

Megoldás:

Mivel az f(x) függvényre minden valós számra teljesül, hogy

$3\cdot f(x)+f(2-x)=x^2$,azért annak is teljesülnie kell, hogy
$3\cdot f(2-x)+f[2-(2-x)]=(2-x)^2$, azaz

(1) $3\cdot f(2-x)+f(x)=4-4\cdot x+x^2$. (2 pont)

A $3\cdot f(x)+f(2-x)=x^2$ feltételből

(2) $9\cdot f(x)+3\cdot f(2-x)=3\cdot x^2$ is következik (1 pont)

(2) és (1) megfelelő oldalait egymásból kivonva:

$8\cdot f(x)=2\cdot x^2+4\cdot x-4$, azaz

(3) $f(x)=\dfrac{x^2+2\cdot x-2}{4}$,

ezzel előállítottuk f(x)-et x függvényeként. (2 pont)

Megvizsgáljuk, hogy milyen x számokra igaz, hogy $f(x)>\frac{13}{4}$.

Ekkor az $\dfrac{x^2+2\cdot x-2}{4}>\dfrac{13}{4}$, illetve

az ebből következő $x^2+2x-15>0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

Az $x^2+2x-15=0$ egyenlet gyökei $x_1=-5$ és $x_2=3$, ezért az $x^2+2x-15>0$ egyenlőtlenség megoldásai:

(4) $x<-5$ vagy $x>3$. (2 pont)

A feladatban azoknak a 2005-nél nem nagyobb x természetes számok halmazát kell megadnunk, amelyekre $f(x)>\frac{13}{4}$.

Ez azt jelenti, hogy a

$$3<x\le 2005$$

egyenlőtlenségeket kielégítő természetes számok számát kell megállapítanunk.

Ezek a számok a következők:

4,5,6,7,…,2004,2005,

Számuk éppen 2002. (2 pont)

A feladat feltételeinek megfelelő természetes számok száma 2002. (1 pont)

Összesen: 10 pont