Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

SZAKKÖZÉPISKOLA

A 2005-2006. tanévi matematika OKTV I. kategória döntő feladatainak megoldásai

1. Igazolja, hogy három, közvetlenül egymás után következő egész szám négyzetének összege nem lehet egyenlő egy egész szám köbével!

(10 pont)

Megoldás:

Tegyük fel a bizonyítandó állítás ellenkezőjét!

Eszerint van három, egymás után következő egész szám (legyenek ezek az $x-1$, az x és az $x+1$ számok), amelyekre:

(1) $$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = y^3, \qquad (y \in Z).$$

A műveletek elvégzése és rendezés után (1)-ből kapjuk, hogy:

(2) $$3x^2 + 2 = y^3.$$ (2 pont)

Az y egész szám 3-mal osztva 0; 1 vagy 2 maradékot adhat. (1 pont)

Az első két esetben (2) jobb és bal oldalának 3-as maradéka nem egyenlő, ezért ez nem lehetséges. (2 pont)

Így csak $y = 3k+2$ fordulhat elő $(k \in Z)$.

Írjuk ezt (2)-be!

$$3x^2 + 2 = (3k+2)^3,$$

azaz

$$3x^2 + 2 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8,$$

ahonnan rendezés és egyszerűsítés után

(3) $$x^2 = 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2.$$ (2 pont)

(3) szerint az x^2 szám 3-as maradéka 2, ez azonban lehetetlen, mert a négyzetszámok 3-as maradéka 0, vagy 1. (2 pont)

Ellentmondásra jutottunk, ezért három egymás után következő egész szám négyzetének összege valóban nem lehet köbszám. <u>(1 pont)</u>

Összesen: 10 pont

2. Mennyi az a paraméter értéke, ha az $x^2 = y^2$ és az $(x-a)^2 + y^2 = 1$ egyenletekből álló egyenletrendszernek pontosan három megoldása van?
(10 pont)

Megoldás:

Az egyenletrendszernek pontosan három megoldása a következőképpen lehet:

az $x_1 \neq 0$ valós szám,

ekkor az egyenletrendszer első egyenletéből kapjuk, hogy

$$y_1 = x_1 \text{ és } y_2 = -x_1,$$

ezzel az $(x_1; y_1)$ és az $(x_1; y_2)$ gyökpár megoldás,

ugyanakkor teljesül, hogy $x_2 = 0$,

ekkor a megoldás a $(0;0)$ gyökpár,

és ez az előzőekkel együtt éppen három megoldás.

(3 pont)

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 1 = 0$ egyenletnek az $x_2 = 0$ gyöke, azaz

$$a^2 - 1 = 0,$$

ahonnan

$$a = \pm 1.$$ (3 pont)

Ha $a = 1$, akkor $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, tehát a megoldások a következők:

$$x = 1, y = 1,$$
$$x = 1, y = -1$$

és $x = 0, y = 0$. (2 pont)

Ha pedig $a = -1$, akkor $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, tehát a megoldások a következők:

$$x = -1, y = -1,$$
$$x = -1, y = 1$$

és $x = 0, y = 0$.

Ellenőrizhető, hogy a kapott megoldások az egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégítik.

(2 pont)

Összesen: 10 pont

3. Egy A_0 végpontú félegyenesen rendre fölvesszük az $A_1, A_2, ..., A_n$ pontokat úgy, hogy $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 3$, $A_2A_3 = 5$, …, $A_{n-1}A_n = 2n-1$.

A kapott $A_{i-1}A_i$ szakaszokra a szakaszokkal egyenlő oldalhosszúságú szabályos háromszögeket szerkesztünk, amelyeknek a félegyenesre nem illeszkedő csúcsai $C_1, C_2, ..., C_n$.

Bizonyítsa be, hogy az A_1C_i szakasz hosszának számértéke minden i-re egész !

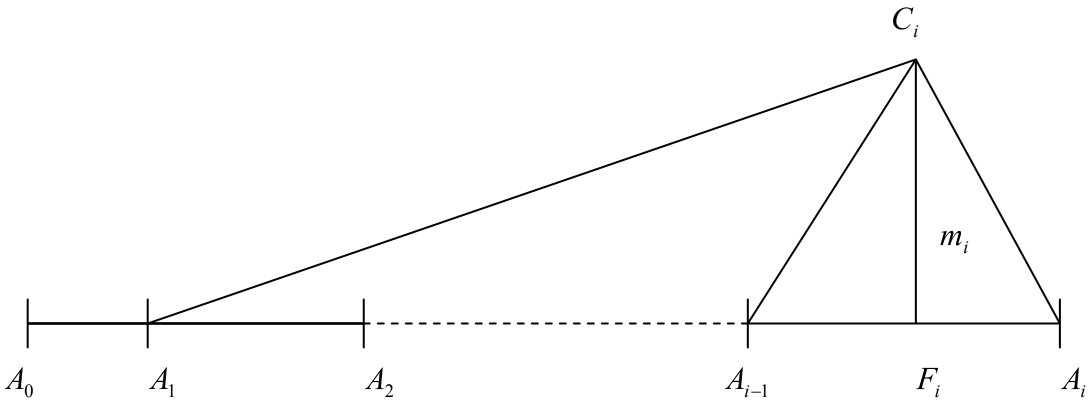
$(i = 1;2;...;n)$

Milyen görbén helyezkednek el a C_i pontok?

(10 pont)

Megoldás:

Ábránk (1. ábra) az i-edik szabályos háromszöget mutatja, melynek a C_i csúcsból induló magassága m_i, és ennek a magasságnak az $A_{i-1}A_i$ oldalon levő talppontja F_i.



1. ábra

A feltételek miatt az $A_{i-1}A_i$ szakasz hosszára:

(1) $$A_{i-1}A_i = 2i-1$$

teljesül, ezért (1) alapján:

(2) $$m_i = \frac{(2i-1)\cdot\sqrt{3}}{2}.$$ (1 pont)

Számítsuk most ki az A_1A_i szakasz hosszát!

Ez a távolság egy olyan számtani sorozat első $i-1$ tagjának összege, melynek első tagja 3, $i-1$-edik tagja $2i-1$. (1 pont)

Ezért:

(3) $$A_1F_i = \frac{3+(2i-1)}{2}\cdot(i-1) - \frac{2i-1}{2},$$

hiszen $$A_{i-1}F_i = \frac{2i-1}{2}.$$

(3)-ban elvégezve a műveleteket:

(4) $$A_1F_i = i^2 - i - \frac{1}{2}.$$ (1 pont)

Felírhatjuk az $A_1F_iC_{i\Delta}$-re a Pitagorasz-tételt:

$$A_1C_i^{\ 2} = m_i^{\ 2} + A_1F_i^{\ 2},$$

azaz

$$A_1C_i^{\ 2} = \frac{(2i-1)^2\cdot 3}{4} + (i^2 - i - \frac{1}{2})^2,$$

ahonnan a műveletek elvégzése után

(5) $$A_1C_i^{\ 2} = i^4 - 2i^3 + 3i^2 - 2i + 1.$$ (1 pont)

(5)jobb oldala teljes négyzet, mégpedig:

$$A_1C_i^{\ 2} = (i^2 - i + 1)^2,$$

eszerint

(6) $$A_1C_i = i^2 - i + 1.$$

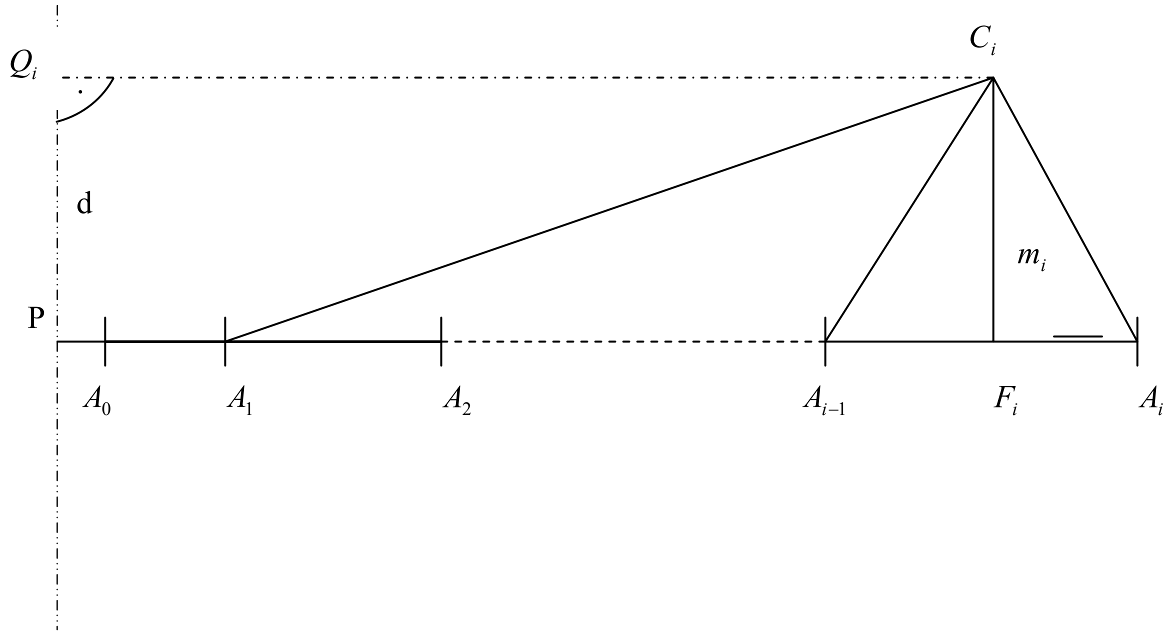
Mivel $i = 1;2;...;n$, ezért (6) jobb oldala minden i-re egész szám.

Ezzel beláttuk, hogy az A_1C_i távolság számértéke minden i-re egész szám.

(2 pont)

Most válaszoljunk a feladat második részében megfogalmazott kérdésre!

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Az ábrán fölvettük az A_0A_1 egyenesen a P pontot az A_0 ponttól balra, mégpedig úgy, hogy $PA_0 = \frac{A_0A_1}{2} = \frac{1}{2}$ legyen, és az A_0A_1 egyenesre a P pontban merőlegest állítottunk, így kaptuk a d egyenest.

Bizonyítani fogjuk, hogy a C_i pontok ($(i = 1;2;...;n)$) olyan parabola pontjai, amelynek fókuszpontja az A_1 pont, vezéregyenese pedig a d egyenes.

Ehhez elegendő belátnunk, hogy a C_i pontnak az A_1 ponttól és a d egyenestől mért távolsága egyenlő.

A 2. ábrán a d-re merőleges C_iQ_i szakasz hosszára:

$$C_iQ_i = A_1F_i + A_0A_1 + PA_0,$$

ez pedig (4), valamint $A_0A_1 = 1$, illetve $PA_0 = \frac{A_0A_1}{2} = \frac{1}{2}$ felhasználásával:

(7) $$C_iQ_i = i^2 - i - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = i^2 - i + 1 .$$ (2 pont)

A (6) és (7) összefüggések szerint a C_i pontnak az A_1 ponttól és a d egyenestől mért távolsága egyenlő, tehát a C_i pont valóban egy olyan parabola pontja, melynek az A_1 pont a fókusza, vezéregyenese pedig a d egyenes.
A kapott összefüggés minden i-re teljesül $(i = 1;2;...;n)$, ezért az összes C_i pontok a fenti parabolán helyezkednek el. (2 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: ha a feladat második részében a versenyző a fenti bizonyítás helyett a parabola egyenletét jól adja meg, és ebből ad helyes választ a kérdésre, az utolsó 4 pontot akkor is kapja meg.