SZAKKÖZÉPISKOLA

A 2006-2007. tanévi matematika OKTV I. kategória első (iskolai) fordulójának pontozási útmutatója

1. Feladat:

Egy számtani sorozat három egymást követő tagjához rendre 3-at, 1-et, 3-at adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk, amelyek összege 13.

Határozza meg a számtani sorozat első tagját és különbségét (differenciáját)!

Megoldás:

Jelölje a számtani sorozat tagjait $a-d, a, a+d$. Ezek összege

$$(a-d)+a+(a+d)=13-(3+1+3)=6$$

azaz $a=2$. **2 pont**

Így a mértani sorozat tagjai $2-d+3,\ 2+1,\ 2+d+3$ **1 pont**

A mértani sorozat definícióját felhasználva

$$\frac{5+d}{3}=\frac{3}{5-d}$$ **1 pont**

ebből

$$25-d^2=9$$
$$d^2=16$$
$$d=4 \quad vagy \quad d=-4$$

2 pont

Két számtani sorozatot kaptunk:

$$a_1=-2,\ d=4 \text{ illetve } a_1=6,\ d=-4$$ **2 pont**

Mind a két sorozat megfelel a feladat feltételeinek. **2 pont**

Összesen: 10 pont

2. Feladat:

Oldja meg az

$$\left(x^2+6x\right)^2-36=(x+3)^2+27$$

egyenletet a pozitív valós számok halmazán!

I. Megoldás:

Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\left(x^2+6x-6\right)\left(x^2+6x+6\right)=x^2+6x+36. \qquad \textbf{2 pont}$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y=x^2+6x$, ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(y-6\right)\left(y+6\right)=y+36,$$

azaz $y^2-y-72=0$. **2 pont**

Az egyenlet megoldásából y-ra a következő értékek adódnak:

$$y_1=9, \quad y_2=-8. \qquad \textbf{1 pont}$$

Visszahelyettesítve y értékét x-re négy eredményt kapunk:

$$x_1=-3+3\sqrt{2};\ x_2=-3-3\sqrt{2};\ x_3=-2;\ x_4=-4. \qquad \textbf{2 pont}$$

A kapott érétkek közül csak az első szám pozitív valós szám, ezért a feladatnak a feltételek-nek eleget tevő megoldása: $x=-3+3\sqrt{2}$. **2 pont**

Helyettesítéssel meggyőződhetünk az eredmény helyességéről. **1 pont**

Összesen: 10 pont

II. Megoldás:

Rendezzük az adott egyenletet a következő módon:

$$\left(x^2+6x\right)^2=\left(x+3\right)^2+63. \qquad \textbf{3 pont}$$

Mivel $x^2+6x=\left(x+3\right)^2-9$, célszerűnek látszik új ismeretlen bevezetése a következőképpen:

$$y=x+3,$$

ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(y^2-9\right)^2=y^2+63,$$

a műveletek elvégzése után pedig az

$$y^4-19y^2+18=0 \qquad \textbf{2 pont}$$

hiányos negyedfokú egyenletet kapjuk.

Utóbbi megoldásai: $y_1=1;\ y_2=-1,\ y_3=-3\sqrt{2};\ y_4=3\sqrt{2}$. **2 pont**

Visszahelyettesítve y értékét x-re rendre a következő négy eredményt kapjuk:

$$x_1=-2;\ x_2=-4;\ x_3=-3-3\sqrt{2};\ x_4=-3+3\sqrt{2}.$$

A kapott értékek közül csak az utolsó pozitív valós szám, ezért a feladatnak a feltételeknek eleget tevő megoldása: $x=-3+3\sqrt{2}$. **2 pont**

Helyettesítéssel meggyőződhetünk az eredmény helyességéről. **1 pont**

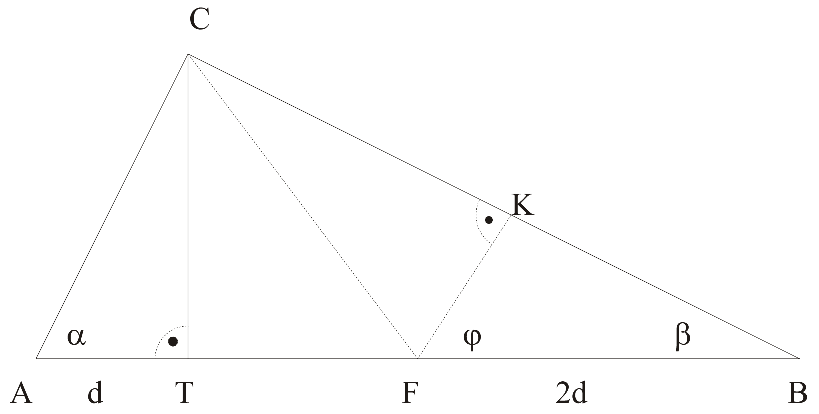
Összesen: 10 pont

3. Feladat:

Az ABC háromszög oldalaira $AB \geq BC \geq AC$ teljesül. A C csúcsból induló magasság T talppontja negyedeli az AB oldalt. Az AB oldal F felezőpontjának a BC oldaltól mért távolsága az AB oldal hosszának negyede.

Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás:



A helyes ábra: **1 pont**

Legyen $AT = FK = d$.

Ha $4AT = AB$, akkor $2FB = AB = 4d$ miatt $FB = 2d$ **1 pont**

Az FBK derékszögű háromszög rövidebbik befogója az átfogó fele, ezért ez olyan háromszög, amelynek hegyesszögei 30°és 60°. **2 pont**

Az ABC háromszög B csúcsnál lévő szöge: $\beta = 30°$ **1 pont**

Mivel $AT = TF = d$, az ACF háromszög C csúcsából induló magassága felezi AF oldalt, ezért a háromszög egyenlőszárú. **1 pont**

Ezért az alapon fekvő szögei megegyeznek, azaz $CAT\angle = \alpha = CFT\angle$.

A $CKFT$ négyszög deltoid, ezért $CFT\angle = CFK\angle = \alpha$ **2 pont**

A $KFB\angle = 60°$, ezért $KFT\angle = 2\alpha = 120°$, tehát $\alpha = 60°$. **1 pont**

Tehát az ABC háromszög derékszögű, hegyesszögei: 30° és 60°. **1 pont**

Összesen: 10 pont

4. feladat:

A Kovács házaspárhoz a Szabó és a Pék házaspár vendégségbe érkezik. Vacsorához – mind a hatan –egy kerek asztal köré ültek.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy sem házaspár, sem két nő nem került egymás mellé? (Két ülésrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy embernek legalább az egyik szomszédja másik személy.)

Megoldás:

Számoljuk össze a kedvező eseteket!

A házaspárokat jelölje (A, B), (C, D), (E, F), ahol A, C és E a férfiak. Az első személyt, legyen B bárhová ültethetjük. Két oldalára csak C és E ülhet, C mellé csak F, E mellé csak D. Az F és D között kimaradó helyre éppen A ülhet (a házaspárok szemben ülnek).

5 pont

Ez az egyetlen lehetőség, hiszen ha B oldalán C és E helyet cserél, ugyanez a sorrend adódik, csak a körüljárás iránya fordul meg.

1 pont

Az összes eset összeszámolásánál az első személyt például B-t, bárhová leültethetjük. Itt is elég az egyik irányt figyelni: B mellé 5 személy, mellé 4 személy, majd 3, 2, 1 ültetési lehetőségünk van, azaz $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ féleképpen ülhettek le. De vegyük figyelembe, a bal és jobb sorrendet, így a tényleges ültetések száma 60.

3 pont

Így a keresett valószínűség: $\frac{1}{60}$. **1 pont**

Összesen: 10 pont

5. Feladat:

Három egymást követő egész szám harmadik hatványának az összege milyen feltétel teljesülése esetén osztható 18-cal?

Bizonyítsuk be, hogy a keresett feltétel esetén a fenti összeg 36-tal is osztható!

Megoldás:

Jelöljük a középső számot n-nel, a szóban forgó összeget S-sel, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

Ekkor

$$S=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1=3n^3+6n \qquad (1)$$

2 pont

Alakítsuk át S-et a következőképpen:

$$S=3n^3+6n=3n\left(n^2+2\right)=3n\left(n^2-1+3\right)=3n\left(n^2-1\right)+9n=3n(n+1)(n-1)+9n.$$

2 pont

Itt az $(n-1)n(n+1)$ kifejezés osztható 6-tal, mert három egymást követő egész szám szorzata, ezért

$$18 \mid 3(n-1)n(n+1).$$

Mivel a kéttagú összeg első tagja osztható 18-cal, ezért az egész kifejezés akkor és csak akkor lesz 18-cal osztható, ha a második tagja is osztható 18-cal.

A $9n$ viszont akkor és csak akkor osztható 18-cal, ha n páros szám. **2 pont**

A 36-tal való oszthatóság bizonyításánál vegyük figyelembe az (1) átalakításánál, hogy n páros szám, azaz $n=2m$.

Ekkor a következő átalakításokat végezhetjük el:

$$S=3n^3+6n=3(2m)^3+6(2m)=24m^3+12m=12m\left(2m^2+1\right)=$$
$$=12m\left(3m^2-m^2+1\right)=36m^3-12m\left(m^2-1\right)=36m^3-12m(m-1)(m+1).$$

Látható, hogy mindkét tag osztható 36-tal, így a különbségük is.

Tehát ha n páros szám, akkor az S mindig osztható 36-tal. **4 pont**

Összesen: 10 pont

6. Feladat:

Frédi és Béni jó barátok. Rendszeresen együtt futnak, illetve gyalogolnak. Egy alkalommal az *A* és *B* települések közötti távot úgy teszik meg, hogy egyszerre indulva Frédi a táv első felében fut, a másik felében gyalogol, Béni pedig a mozgásidejének a felében fut és a másik felében gyalogol. Annyira összeszoktak már, hogy mind a futási, mind a gyalogos sebességük azonos a másikéval.

Ki ér előbb A-ból *B*-be? (A futás sebessége nem kisebb a gyaloglás sebességénél.)

I. Megoldás:

Tekintettel arra, hogy a futás sebessége nem kisebb a gyaloglás sebességénél, ezért aki a sportolásra szánt idő feléig fut - azaz Béni- és azt követően gyalogol, a táv felénél nem kisebb távolságot tesz meg a futás ideje alatt, ezért Béni nem érhet később Frédinél. Egyszerre csak akkor érkezhetnek a célba, ha a futás és a gyaloglás sebessége egyenlő lenne.

Helyes és szabatos indoklás esetén 10 pont jár a feladat megoldásáért.

II. Megoldás:

Legyen a közös futási sebesség v, a közös gyaloglási sebesség w, Frédinek az út feléig a menetideje t_1, a másik felében t_2. Béninek a teljes útra számított menetideje $2t$!

2 pont

Ekkor felírható, hogy

(2) $$vt_1 + wt_2 = wt + vt.$$ **1 pont**

Mivel $vt_1 = wt_2$, ezért $w = \frac{vt_1}{t_2}$, így (2)-ben (felhasználva még azt is, hogy $vt_1 = wt_2$):

$$2vt_1 = \frac{vt_1}{t_2} \cdot t + vt,$$ **2 pont**

ahonnan rendezés után

$$2t_1t_2 = (t_1 + t_2) \cdot t,$$

melyből

(3) $$\frac{2t_1t_2}{t_1 + t_2} = t$$ **2 pont**

következik.

(3) bal oldalán éppen a pozitív t_1, t_2 számok harmonikus közepe áll, erről tudjuk, hogy

(4) $$\frac{2t_1t_2}{t_1 + t_2} \leq \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

(3) és (4) egybevetéséből adódik, hogy

(5) $$t_1 + t_2 \geq 2t.$$ **2 pont**

(5) szerint Frédi menetideje legalább akkora, mint Béniié, azaz Béni vagy előbb ér B-be – ha a futási sebesség nagyobb a gyaloglás sebességénél –, vagy (ha az említett két sebesség egyenlő) egyszerre érkeznek.

1 pont

Összesen: 10 pont