A 2006-2007. tanévi matematika OKTV I. kategória második fordulójának értékelési-javítási útmutatója SZAKKÖZÉPISKOLA

1. feladat

Határozzuk meg az m valós szám értékét úgy, hogy az

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

egyenlőtlenség minden valós x-re teljesüljön!

Megoldás:

A számlálót átalakítva kapjuk, hogy

$$x^2-8x+20=(x-4)^2+4. \qquad \textit{(1 pont)}$$

Ez minden x-re pozitív. Ezért az eredeti feladat ekvivalens azzal, hogy az

$$mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$$

egyenlőtlenségnek minden x-re fenn kell állnia. *(1 pont)*

Ha $m=0$, akkor ez azt jelenti, hogy a $2x+4<0$. Ez pedig nem igaz minden valós x-re, például x=0-ra sem. *(2 pont)*

Ha $m\neq 0$, akkor másodfokú polinom áll az egyenlőtlenség bal oldalán. Ahhoz, hogy az egyenlőtlenség teljesüljön minden x-re, feltétel, hogy

(1) $m<0$ legyen, *(1 pont)*

és ne legyen zérushelye, azaz a diszkrimináns negatív legyen.

$$D=4(m+1)^2-4m(9m+4),$$

$$D=-32m^2-8m+4,$$

$$D=-4(8m^2+2m-1).$$

D akkor negatív, ha

(2) $8m^2+2m-1>0$. *(2 pont)*

Mivel a (2) bal oldalán álló másodfokú függvény zérushelyei:

$$m_1=-\frac{1}{2} \quad ; \quad m_2=\frac{1}{4} \qquad \textit{(1 pont)}$$

Ezért a (2) egyenlőtlenség $m<-\frac{1}{2}$ vagy $m>\frac{1}{4}$ esetén teljesül. Figyelembe véve (1)-et, az $m<0$ feltételt, a feladat megoldása

$$m<-\frac{1}{2}. \qquad \textit{(2 pont)}$$

Összesen: 10 pont

2. feladat

Oldja meg a valós számokból álló számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$5x^2+2xy+2y^2-12x-6y+9=0$$

I. Megoldás

Csoportosítsuk az egyenlet bal oldalát, és alakítsunk ki teljes négyzeteket:

$$5x^2+2xy+2y^2-12x-6y+9=0,$$
$$4x^2+x^2+4xy-2xy+y^2+y^2-12x-6y+9=0,$$

(2 pont)

$$\left(4x^2+4xy+y^2\right)-6(2x+y)+9+\left(x^2-2xy+y^2\right)=0,$$
$$(2x+y)^2-6(2x+y)+9+(x^2-2xy+y^2)=0,$$
$$(2x+y-3)^2+(x-y)^2=0.$$

(3 pont)

Két valós szám négyzetének összege akkor és csak akkor nulla, ha mind a két szám nulla, azaz

$2x+y-3=0$ és $x-y=0$. *(2 pont)*

Megoldva kapjuk, hogy

$x=1,$
$y=1.$ *(2 pont)*

Ez a számpár kielégíti az egyenletet. *(1 pont)*

Összesen: 10 pont

II. Megoldás

Tekintsük az egyenletben ismeretlennek x-et, és y-t paraméternek! Ennek megfelelően átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$5x^2+2xy+2y^2-12x-6y+9=0,$$
$$5x^2+x(2y-12)+\left(2y^2-6y+9\right)=0.$$

(2 pont)

Az egyenlet megoldása:

$$x_{1,2}=\frac{-(2y-12)\pm\sqrt{(2y-12)^2-20\left(2y^2-6y+9\right)}}{10},$$
$$x_{1,2}=\frac{-(2y-12)\pm\sqrt{-36y^2+72y-36}}{10},$$
$$x_{1,2}=\frac{-(2y-12)\pm\sqrt{-36(y-1)^2}}{10}.$$

(3 pont)

Akkor és csak akkor létezik megoldás, ha a diszkrimináns ≥ 0:

$$-36(y-1)^2 \geq 0,$$

azaz

$$(y-1)^2 \leq 0.$$

Ez pedig csak y=1 esetén teljesül. *(3 pont)*

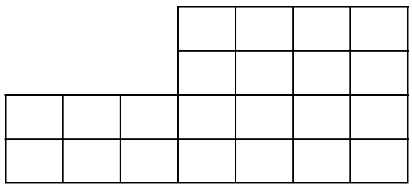
Ekkor $x = 1$. *(1 pont)*

Az (1,1) számpár kielégíti az egyenletet. *(1 pont)*

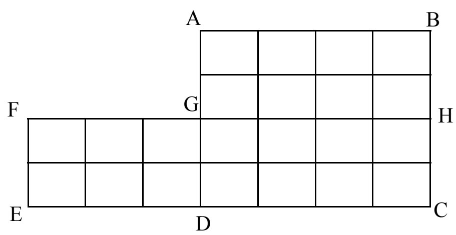
Összesen: 10 pont

3. feladat

Hány téglalap látható a rajzon? (A téglalapok oldalai csak megrajzolt szakaszok lehetnek.)



Megoldás



Nevezzük el a pontokat az ábra jelölése szerint!

Először számoljuk össze, hány olyan téglalap van, melyek „függőleges” oldalegyenese az ABCD-n belül van.

A téglalap „függőleges” határoló oldalai számára két egyenest kell kiválasztanunk az öt „függőleges” egyenes közül, ezt

$\binom{5}{2} = 10$-féleképpen tehetjük meg. *(2 pont)*

Ettől függetlenül a „vízszintes” két oldalegyenest is öt „vízszintes” egyenes közül választhatjuk, így az is

$\binom{5}{2} = 10$-féle lehetőség. *(1 pont)*

Eddig összesen $10 \cdot 10 = 100$ téglalapunk lesz. *(1 pont)*

Ezután hasonlóan hajtsuk végre az összeszámlálást az FHCE –n belüli téglalapokra is!

Itt $\binom{8}{2}\cdot\binom{3}{2}=28\cdot 3=84$ téglalapot kapunk. *(2 pont)*

Ha a kétféle téglalap-számot összeadjuk, akkor kétszer számoljuk azokat, amelyek a GHCD-n belül vannak. Ezért ezeknek a számát le kell vonni az előbbi összegből. *(2 pont)*

Ezek száma: $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}=10\cdot 3=30$. *(1 pont)*

Így a rajzon látható téglalapok száma: 100+84-30=154. *(1 pont)*

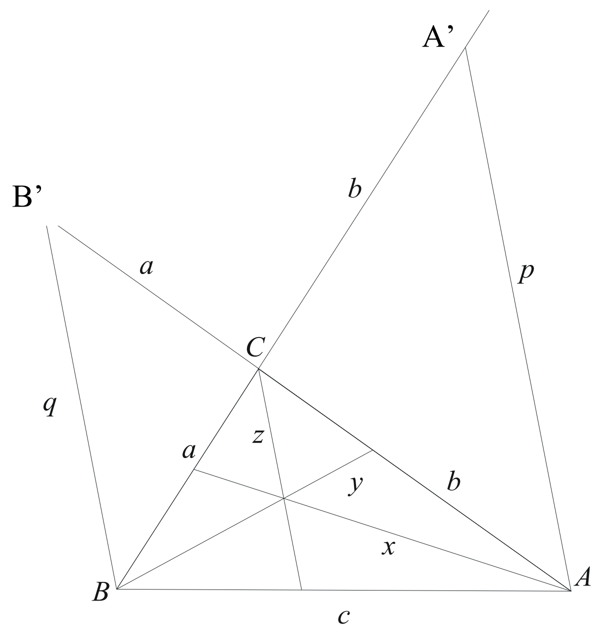
Összesen: 10 pont

4. feladat

Legyenek egy háromszög oldalai a,b,c és a belső szögfelezőknek a háromszög belsejébe eső darabjai x,y,z hosszúságúak. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ !$$

Megoldás



Használjuk az ábra jelöléseit, ahol ***p*** és ***q*** párhuzamos a ***z*** szögfelezővel! Ennek következménye, hogy

CB'=a és CA'=b *(1 pont)*

A ***z*** szögfelezőre felírhatjuk a következő arányokat (például a párhuzamos szelők tétele alapján):

(1) $\frac{z}{p}=\frac{a}{a+b}$, *(1 pont)*

(2) $\frac{z}{q}=\frac{b}{a+b}$. *(1 pont)*

(1) és (2) összeadása után

$\frac{z}{p}+\frac{z}{q}=1$, *(1 pont)*

azaz

(3) $\frac{1}{z}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. *(1 pont)*

Az ábrán szereplő AA'C illetve BB'C háromszögekre felírt háromszög-egyenlőtlenségek szerint:

$p < 2b$ és $q < 2a$, ezért (3) alapján: *(1 pont)*

$$(4) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}.$$ *(1 pont)*

Hasonlóképpen látható be, hogy

$$(5) \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c},$$

illetve *(1 pont)*

$$(6) \quad \frac{1}{y} > \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a}.$$ *(1 pont)*

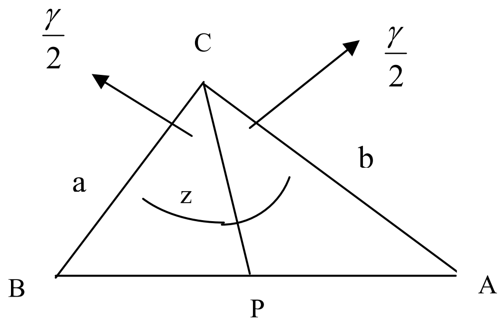
(4), (5) és (6) megfelelő oldalait összeadva a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$ *(1 pont)*

bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Összesen: 10 pont

II. Megoldás



Írjuk fel a BPC, PAC és BAC háromszögek területeit, és használjuk fel, hogy

$$t_{BPC} + t_{PAC} = t_{BAC}$$ (1 pont)

$$t_{BPC} = \frac{az\sin\frac{\gamma}{2}}{2},$$

$$t_{PAC} = \frac{zb\sin\frac{\gamma}{2}}{2},$$

$$t_{BAC} = \frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

(1 pont)

Tehát

$$\frac{az\sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{zb\sin\frac{\gamma}{2}}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2},$$

amiből (felhasználva, hogy $\gamma = 2\frac{\gamma}{2}$) (1 pont)

$$az\sin\frac{\gamma}{2} + zb\sin\frac{\gamma}{2} = ab2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

illetve

$$az + bz = 2ab\cos\frac{\gamma}{2}.$$ (1 pont)

Mivel $\cos\frac{\gamma}{2} < 1$, ezért (1 pont)

$$az + bz < 2ab,$$

$$z < \frac{2ab}{a+b,}$$

(1 pont)

$$\frac{1}{z} > \frac{a+b}{2ab},$$

(4) $$\frac{1}{z} > \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}.$$ *(1 pont)*

Hasonlóképpen látható be, hogy

(5) $$\frac{1}{x} > \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c},$$

illetve *(1 pont)*

(6) $$\frac{1}{y} > \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a}.$$ *(1 pont)*

(4), (5) és (6) megfelelő oldalait összeadva a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$ *(1 pont)*

bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Összesen: 10 pont

5. feladat

Milyen pozitív p, q, r prímszámokra teljesül, hogy

$$(7-p)\cdot(3q+r)+p\cdot q\cdot r=0\ ?$$

Megoldás:

Mivel p, q, r pozitív prímszámok, ezért p csak 7-nél nagyobb (tehát páratlan) prím lehet, ellenkező esetben az egyenlet bal oldala pozitív lenne, míg a jobb oldal 0.

Ha $p > 7$, akkor p páratlan, így $(7-p)\cdot(3q+r)$ biztosan páros szám, ezért a $p\cdot q\cdot r$ szorzatban biztosan van egy páros prím, de ez nem lehet a p. *(3 pont)*

Ha $q = 2$,

akkor egyenletünk $(7-p)\cdot(6+r)+2pr=0$.

A műveletek elvégzése után a

$$42+7r=p(6-r)$$

egyenletre jutunk.

Mivel az egyenlet bal oldala pozitív, ezért a jobb oldalának is pozitívnak kell lenni, vagyis

$$r<6 \qquad .$$

Ezért $r = 2,\ r = 3,\ r = 5$ lehetséges.

A három esetet megvizsgálva p-re 14, 21, 77 adódik, amelyek nem prímszámok, így q=2 nem ad megoldást. *(3 pont)*

Ha $r = 2$,

akkor egyenletünk $(7-p)\cdot(3q+2)+2pq=0$.

A műveletek elvégzése után a

$(q+2)\cdot(21-p)=28$ egyenletet kaphatjuk.

Ebből – az előbbi gondolatmenethez hasonlóan - látható, hogy $p < 21$.

Így p lehetséges értékei (mivel $p>7$):

$p=11,\ p=13,\ p=17.$

A megfelelő p értékekhez q értékét számolva

$q=0{,}8;\ q=1{,}5;\ q=5$ adódik.

Tehát csak $p = 17$ esetén kapunk q-ra prímszámot, mégpedig $q = 5$-öt. *(3 pont)*

A feladat megoldása: $p = 17;\ q = 5;\ r = 2$. *(1 pont)*

Összesen: 10 pont