A döntő feladatainak megoldásai

1. Legyenek az $x^2-(a+d)\cdot x+ad-bc=0$ egyenlet gyökei az x_1 és x_2 valós számok! Bizonyítsa be, hogy ekkor az $y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)\cdot y+(ad-bc)^3=0$ egyenlet gyökei az $y_1=x_1^{\ 3}$ és $y_2=\ x_2^{\ 3}$!

Megoldás:

Írjuk fel az $x^2-(a+d)\cdot x+ad-bc=0$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket:

(1) $$x_1+x_2=a+d\,,$$

illetve

(2) $$x_1x_2=ad-bc\,.$$ (1 pont)

Az $y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)\cdot y+(ad-bc)^3=0$ egyenlet elsőfokú tag együtthatójának ellentettjét alakítva kapjuk:

$$a^3+d^3+3abc+3bcd=a^3+d^3+3(a+d)bc\,,$$

(3) $$a^3+d^3+3abc+3bcd=(a+d)^3-3(a+d)(ad-bc)\,.$$

Az (1) és (2) összefüggéseket (3)-ba helyettesítve:

$$a^3+b^3+3abc+3bcd=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2\,,$$

a műveletek elvégzése és rendezés után:

(4) $$a^3+b^3+3abc+3bcd=x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}\,.$$ (4 pont)

Másrészt az $y^2-(a^3+b^3+3abc+3bcd)\cdot y+(ad-bc)^3=0$ nulladfokú tagjába (2)-t helyettesítve :

$$(ad-bc)^3=(x_1\cdot x_2)^3$$

(5) $$(ad-bc)^3=x_1^3x_2^3$$ (1 pont)

(4) és (5) felhasználásával az $y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)\cdot y+(ad-bc)^3=0$ egyenlet felírható a következő képpen is:

(6) $$y^2-(x_1^3+x_2^3)y+x_1^3x_2^3=0\,.$$

(6) bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

(7) $$(y-x_1^3)(y-x_2^3)=0\,.$$

A (7) egyenlet gyökei pedig valóban az x_1^3 és x_2^3 valós számok. (3 pont)

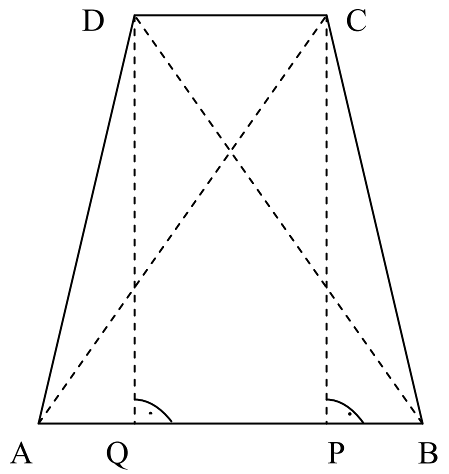
Az $y^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)\cdot y+\left(ad-bc\right)^3=0$ egyenletnek akkor vannak valós gyökei, ha D=$(a^3+b^3+3abc+3bcd)^2-4\cdot\left(ad-bc\right)^3\geq 0$.
Ez a feltétel (4) és (5) segítségével $\left(x_1{}^3+x_2{}^3\right)^2-4\cdot x_1{}^3\cdot x_2{}^3\geq 0$,
azaz $\left(x_1{}^3-x_2{}^3\right)^2\geq 0$ alakú lesz. Ez utóbbi minden x_1 és x_2 valós számra teljesül, ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ha az $x^2-\left(a+d\right)\cdot x+ad-bc=0$ egyenletnek vannak valós gyökei, akkor az $y^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)\cdot y+\left(ad-bc\right)^3=0$ egyenlet valós gyökei is léteznek (1 pont)

összesen: 10 pont

2. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. A $DC;CB$ és BD szakaszok hosszai ebben a sorrendben egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai. Az $AD;AB$ és AC szakaszok hosszai ebben a sorrendben szintén egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagjai.
Határozza meg a trapéz oldalai hosszának arányát!

Megoldás:

Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát!
Az ábrán merőlegest bocsátottunk a C illetve D pontokból az AB szakaszra, a merőlegesek talppontjai P illetve Q.



Legyen $AB = a$, $BC = b$ és $CD = c$, továbbá $AC = e$!
A tengelyes szimmetria miatt nyilvánvaló, hogy
$DA = b$ és $BD = e$.
Az AQ illetve BQ befogók hossza:

(1) $$AQ = \frac{a-c}{2},$$

illetve

(2) $$BQ = \frac{a+c}{2}.$$ (1 pont)

A feltételek miatt a feladatban két növekvő számtani sorozat 3-3 egymást követő tagja szerepel, fenti jelöléseinkkel ezek a következők:

(3) $$c; b; e,$$

és

(4) $$b; a; e.$$

Legyen a (3) sorozat differenciája d!

Mivel a sorozat növekvő, ezért nyilvánvaló, hogy $d > 0$.

A számtani sorozat tulajdonsága miatt:

(5) $$c = b - d \quad \text{és} \quad e = b + d.$$ (1 pont)

A (4) számtani sorozatra teljesül, hogy
$$a = \frac{e+b}{2},$$
azaz (5)-öt behelyettesítve:

(6) $$a = \frac{2b+d}{2} = b + \frac{d}{2}.$$ (1 pont)

Az ADQ és BDQ háromszögek derékszögűek, ezért (1) és (2) felhasználásával a Pitagorasz-tétel alapján felírjuk, hogy:

(7) $$b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = e^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2.$$ (1 pont)

az (5) és (6) kifejezéseiből következik, hogy egyrészt

$$\frac{a-c}{2} = \frac{3d}{4},$$

másrészt

$$\frac{a+c}{2} = \frac{4b-d}{4}.$$ (1 pont)

Ezeket, illetve az ugyancsak (5)-ből kapott $e = b + d$ összefüggést beírjuk (7)-be:

$$b^2 - \left(\frac{3d}{4}\right)^2 = (b+d)^2 - \left(\frac{4b-d}{4}\right)^2 .$$ (1 pont)

Elvégezve a műveleteket, rendezés és egyszerűsítés után a

(8) $$2b^2 - 5bd - 3d^2 = 0$$

egyenletre jutunk.

Tekintsük (8)-at b -ben másodfokú egyenletnek, a megoldóképlet segítségével kapjuk, hogy:

$$b_1 = 3d \quad \text{és} \quad b_2 = -\frac{1}{2}d .$$

Figyelembe véve a $d > 0$ feltételt a $b_2 = -\frac{1}{2}d$ nem megoldás. (2 pont)

Ezért

$$b = 3d \quad .$$

Így (5) és (6) szerint:

$$a = \frac{7d}{2}; \qquad b = \frac{6d}{2}; \qquad c = \frac{4d}{2}.$$ (1 pont)

Ebből következően az $ABCD$ trapéz oldalai hosszának aránya:

$$AB : BC : CD : DA = 7 : 6 : 4 : 6 .$$ (1 pont)

összesen: 10 pont

3. Anna dobókockájának 4 lapja fehér, 2 lapja fekete, Bori dobókockájának minden lapja fehér.

a) Bori be akarja festeni a kockája néhány lapját feketére úgy, hogy ha a festés után egyszerre dobnak a kockáikkal, akkor az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{7}{18}$ legyen.
Hány lapot fessen be Bori?

b) Mutassa meg, hogy Bori nem tudja úgy festeni a kockáját, hogy az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$ legyen!

c) A Bori által feketére festett lapok számához rendeljük hozzá az azonos szín dobásának valószínűségét!
Adja meg ennek a függvénynek az értékkészletét!

<u>Megoldás:</u>

Tegyük fel, hogy Bori x számú lapot festett be.

Először vizsgáljuk azt az eseményt, hogy mindketten feketét dobnak!
Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy Anna feketét dob, és
B-vel azt, hogy Bori dob feketét

Ezek valószínűségei a következők:

$$P(A)=\frac{2}{6}, \text{ illetve } P(B)=\frac{x}{6}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az A és B egymástól független események, ezért annak valószínűsége,
Hogy mindketten feketét dobnak,

$$P_{(AB)}=P_{(A)}\cdot P_{(B)},$$

azaz

(1) $$P(A\cdot B)=\frac{2x}{36}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Másodszor vizsgáljuk azt, hogy mindketten fehéret dobnak.
Legyen C illetve D az az esemény, hogy Anna illetve Bori fehéret dob!
Ezek valószínűségei:

$$P(C)=\frac{4}{6} \text{ illetve } P(D)=\frac{6-x}{6}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a dobások egymástól függetlenek, így annak valószínűsége, hogy mindketten fehéret dobnak:

(2) $$P(C\cdot D)=\frac{4\cdot(6-x)}{36}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az azonosan fekete, illetve azonosan fehér szín dobása egymást kizáró események, ezért az azonos szín dobásának valószínűsége az (1) és (2) valószínűségek összege:

$$P(A\cdot B+C\cdot D)=\frac{2x}{36}+\frac{4\cdot(6-x)}{36},$$

rendezés és egyszerűsítés után:

(3) $$P(A\cdot B+C\cdot D)=\frac{12-x}{18}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Bori kívánsága szerint ez $\frac{7}{18}$ kell, hogy legyen.

(4) $$\frac{12-x}{18}=\frac{7}{18}.$$

A (4) egyenlet megoldása $x=5$, ezért a feladat a) részének kérdésére az a válaszunk, hogy Borinak a saját kockája 5 lapját kell feketére befestenie ahhoz, hogy az azonos szín dobásának valószínűsége $\frac{7}{18}$ legyen. (1 pont)

A feladat b) kérdése szerint az azonos szín dobásának valószínűsége
$\frac{1}{4}$ lenne. Ez a

(5) $$\frac{12-x}{18}=\frac{1}{4}$$

egyenlet megoldásából kapott x mellett teljesülne.

(5) megoldása: $x=\frac{15}{2}$, ez nem egész, így nem lehet kocka lapjainak száma.

Ezért az azonos szín dobásának valószínűsége valóban nem lehet $\frac{1}{4}$. (2 pont)

A c) kérdésre adandó válaszhoz először határozzuk meg az $f(x)$-szel
Jelölt függvény értelmezési tartományát!

Mivel Bori a kockájának $0,1,2,3,4,5$ vagy 6 lapját festheti be feketére,
ezért:

$$D_f=\{0;1;2;3;4;5;6\}.$$ (1 pont)

(3) alapján a függvény értékkészletének elemei kiszámíthatók, így rendre
azt kapjuk, hogy:

$$R_f=\left\{\frac{2}{3};\frac{11}{18};\frac{5}{9};\frac{1}{2};\frac{4}{9};\frac{7}{18};\frac{1}{3}\right\}.$$ (1 pont)

összesen: 10 pont