Az 1. forduló feladatainak megoldása

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$, és $2x \neq 1$ illetve $8x^2 \neq 1$, amelyekből
$x \neq \frac{1}{2}$, illetve (az $x > 0$ feltételt is figyelembe véve) $x \neq \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$ következik. (1 pont)

A $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ azonosság alapján azonos alapú logaritmusokká alakítjuk a szereplő mennyiségeket:

$$\log_{2x} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 2x},$$

illetve

$$\log_{8x^2} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 (8x^2)},$$

amelyekből a logaritmus azonosságait alkalmazva

$$\log_{2x} x = \frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}$$

valamint

$$\log_{8x^2} x = \frac{\log_2 x}{3+2\cdot\log_2 x}$$

következik.

(2 pont)

Ezeket figyelembe véve, és az $y = \log_2 x$ jelölést bevezetve a kiindulási egyenlet a következő lesz:

(1) $$\frac{y}{1+y} + \frac{y}{3+2y} = 0.$$ (1 pont)

(1)-ben a műveleteket elvégezve a

(2) $$\frac{3y^2+4y}{(1+y)\cdot(3+2y)} = 0$$

egyenletet kapjuk. (1 pont)

(2) akkor és csak akkor teljesül, ha számlálója 0, és nevezője $\neq 0$,

azaz

$$3y^2+4y=0,$$

amiből

$$y_1=0 \qquad \text{és} \qquad y_2=-\frac{4}{3}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor $(1+y)\cdot(3+2y)\neq 0$, vagyis a nevező $\neq 0$. (1 pont)

Ha $y_1=0$, azaz $\log_2 x=0$, akkor a logaritmus definíciója alapján

$$x_1=1.$$

(1 pont)

Ha $y_2=-\frac{4}{3}$, azaz $\log_2 x=-\frac{4}{3}$,

akkor $x_2=2^{-\frac{4}{3}}$, más alakban:

$$x_2=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\left(=\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}\right)$$

adódik. (1 pont)

Ezek a valós számok feltételeinknek ($x\neq\frac{1}{2}$, $x>0$, $x\neq\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$) megfelelnek, továbbá mivel átalakításaink a feltételeknek megfelelő számhalmazon ekvivalensek voltak, ezért valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.

Tehát az egyenlet megoldásai: $x_1=1$ és $x_2=\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$. <u>(1 pont)</u>

Összesen: 10 pont

2. **Legyenek x és y olyan pozitív egészek, melyek eleget tesznek a**

$$4y^2 - 9x^2 = 2007$$

egyenletnek.
Mennyi az összes összetartozó x és y érték szorzatának legnagyobb prímosztója?

Megoldás:

A $4y^2 - 9x^2 = 2007$ egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

(1) $$(2y-3x)\cdot(2y+3x) = 2007.$$ (1 pont)

A feltétel szerint x és y pozitív egészek, ezért

$$(2y+3x) \in N^+$$

és

$(2y-3x)$ is egész szám, de mivel (1) jobb oldala pozitív, ezért

$$(2y-3x) \in N^+$$

is igaz,

továbbá nyilvánvaló, hogy

(2) $$2y-3x < 2y+3x.$$ (2 pont)

Ezek szerint a 2007 számot két pozitív egész szám szorzatára kell bontani.
A 2007 prímtényezős felbontása a következő:

(3) $$2007 = 3^2 \cdot 223.$$ (1 pont)

Fenti megállapításainkat figyelembe véve (2) és (3) miatt a következő esetek lehetségesek:

(4) $2y-3x = 1$ és $2y+3x = 2007$,

(5) $2y-3x = 3$ és $2y+3x = 669$,

(6) $2y-3x = 9$ és $2y+3x = 223$. (3 pont)

A (4), (5) és (6) egyenletrendszerek közül csak (5)-nek van olyan megoldása, ahol x és y mindegyike pozitív egész, tehát a kitűzött egyenletnek egyetlen összetartozó számpár a megoldása, mégpedig

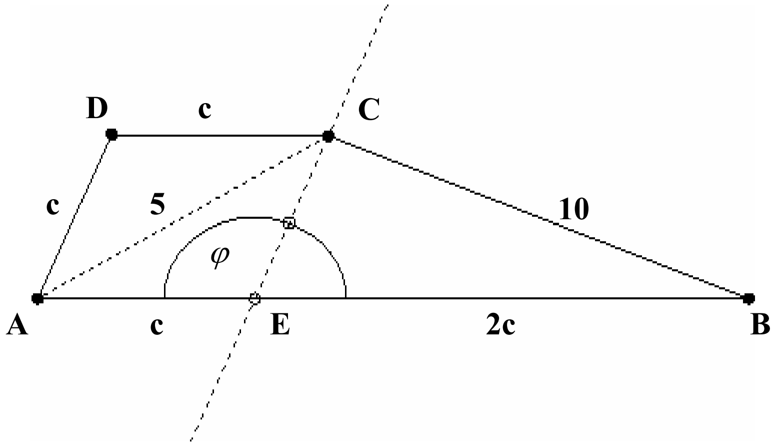
$$x = 111 \text{ és } y = 168.$$ (2 pont)

Mivel $x = 111 = 3 \cdot 37$ és $y = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, ezért az összetartozó x és y értékek szorzata $x \cdot y = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 37$, ennek a szorzatnak a legnagyobb prímosztója pedig a 37, tehát feladatunk megoldása 37. (1 pont)

Összesen: 10 pont

3. **Az $ABCD$ trapéz AB alapjának hossza háromszorosa a CD alapnak és az AD szárnak. Az AC átló hossza 5 egység, a BC szár hossza 10 egység. Mekkorák az $ABCD$ trapéz oldalai?**

<u>1. megoldás:</u> jelöléseink az ábrán láthatók.



Az ábrán párhuzamost húztunk a C ponton keresztül az AD szakasszal, ez az egyenes a trapéz AB alapját az E pontban metszette.
Legyen $AEC\angle = \varphi$, ekkor $CEB\angle = 180° - \varphi$.

A szerkesztés miatt $AECD$ paralelogramma, ebből, és a feltételekből következően

$CD = DA = AE = EC = c$, valamint $EB = 2c$. (2 pont)

Írjuk fel a koszinusztételt az AEC háromszögben az 5 egység hosszúságú AC oldalra, valamint a BEC háromszögben a 10 egység hosszúságú BC oldalra:

(1) $$25 = 2c^2 - 2c^2 \cdot \cos\varphi,$$

illetve

(2) $$100 = 5c^2 - 4c^2 \cdot \cos(180° - \varphi).$$ (2 pont)

A $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ trigonometrikus azonosság alkalmazása után (2) a következő alakú lesz:

(3) $$100 = 5c^2 + 4c^2 \cdot \cos\varphi.$$ (1 pont)

Az (1) és (3) egyenletrendszerből:

(4) $$9c^2 = 150$$

adódik. (1 pont)

Figyelembe véve, hogy $c > 0$, (4)-ből (1 pont)

$$c = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

következik. (1 pont)

Az $ABCD$ trapéz oldalai tehát

$$AB = 3c = 5 \cdot \sqrt{6},\ BC = 10,\ CD = c = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}, DA = c = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}.$$

(1 pont)

Diszkusszió

A feladatban leírt adatokkal rendelkező trapéz csak akkor szerkeszthető meg, tehát megoldásaink is csak akkor léteznek, ha az 1. megoldás ábráján szereplő BCE és ABC háromszögekre teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, azaz

$$2c + c > 10 \text{ és } 10 + 5 > 3c, \text{ amiből } \frac{10}{3} < c < \frac{15}{3},$$

és mivel $c \approx 4{,}08$, ez teljesül.

Könnyen látható, hogy teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek az ACE háromszögre is. $(2c > 5)$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Egészítsük ki az előző ábrát $CAB\angle = \alpha$ jelöléssel!
Írjuk fel az ABC háromszög területét két módon!
Először Héron-képlettel
Az ABC háromszög kerülete:

$$K_{ABC_\Delta} = 15 + 3c,$$

ezért félkerülete:

$$s = \frac{15 + 3c}{2}.$$

Ebből következik, hogy

$$s - AB = \frac{15 - 3c}{2}, \quad s - AC = \frac{3c + 5}{2}, \quad s - BC = \frac{3c - 5}{2}.$$ (2 pont)

Az ABC háromszög területére felírva a Héron-képletet:

(1)
$$T_{ABC_\Delta} = \sqrt{\frac{15+3c}{2} \cdot \frac{15-3c}{2} \cdot \frac{3c+5}{2} \cdot \frac{3c-5}{2}}.$$

(1)-ben elvégezve a műveleteket, a

(2)
$$T_{ABC_\Delta} = \frac{\sqrt{\left(225-9c^2\right)\cdot\left(9c^2-25\right)}}{4}$$

összefüggést kapjuk. (1 pont)

Ez a terület a háromszög két oldalának és a közbezárt szög szinuszának segítségével is kifejezhető:

(3)
$$T_{ABC_\Delta} = \frac{3c \cdot 5 \cdot \sin\alpha}{2}.$$
(1 pont)

Mivel (2) és (3) baloldalai egyenlők, ezért

$$\frac{\sqrt{(225-9c^2)(9c^2-25)}}{4} = \frac{15c\sin\alpha}{2}$$

amiből az átalakítások után

(4)
$$\left(225-9c^2\right)\cdot\left(9c^2-25\right) = 900 \cdot c^2 \cdot \sin^2\alpha$$

egyenletre jutunk. (1 pont)

$\sin^2\alpha$ kiszámításához felírjuk az AEC egyenlőszárú háromszög feléből:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{AC}{2}}{AE} = \frac{2{,}5}{c},$$
(1 pont)

és a négyzetes trigonometriai összefüggés alapján:

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{4c^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4c^2-25}{4c^2}$$

adódik. (1 pont)

Ezt beírjuk (4)-be

(5)
$$\left(225-9c^2\right)\cdot\left(9c^2-25\right) = 225 \cdot \left(4c^2-25\right).$$

A műveletek elvégzése után mivel $c^2 \neq 0$ a

$$9c^2 = 150$$

egyenletet kapjuk, innen a trapéz oldalai: (1 pont)

$AB = 3c = 5 \cdot \sqrt{6}$, $BC = 10$, $CD = c = \dfrac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$, $DA = c = \dfrac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$

következik. (1 pont)

Diszkusszió

A feladatban leírt adatokkal rendelkező trapéz csak akkor szerkeszthető meg, tehát megoldásaink is csak akkor léteznek, ha az 1. megoldás ábráján szereplő BCE és ABC háromszögekre teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, azaz

$2c + c > 10$ és $10 + 5 > 3c$, amiből $\dfrac{10}{3} < c < \dfrac{15}{3}$,

és mivel $c \approx 4{,}08$, ez teljesül.

Könnyen látható, hogy teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek az ACE háromszögre is. $(2c > 5)$ (1 pont)

Összesen:10 pont

3. megoldás:

Ismét az 1. megoldás ábráját használjuk.

Az ABC háromszögben az AB oldal belső pontja E, ezért felírhatjuk a Stewart-tételt, amely szerint:

(1) $$CE^2 \cdot AB = AC^2 \cdot EB + BC^2 \cdot AE - AB \cdot AE \cdot EB.$$ (3 pont)

Mivel $AE = CE = c$, $AB = 3c$, $EB = 2c$, illetve $AC = 5$ és $BC = 10$, ezért (1)-be a megfelelő értékeket beírva

(2) $$c^2 \cdot 3c = 25 \cdot 2c + 100 \cdot c - 3c \cdot c \cdot 2c.$$ (2 pont)

(2)-ből a $c > 0$ számmal való osztás, a műveletek elvégzése és rendezés után

$$9c^2 = 150,$$

majd

$$c = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

adódik. (3 pont)

Ezért a trapéz oldalai:

$$AB = 3c = 5 \cdot \sqrt{6}\,,\ BC = 10\,,\ CD = c = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}\,,\ DA = c = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}\,. \quad \text{(1 pont)}$$

Diszkusszió

A feladatban leírt adatokkal rendelkező trapéz csak akkor szerkeszthető meg, tehát megoldásaink is csak akkor léteznek, ha az 1. megoldás ábráján szereplő BCE és ABC háromszögekre teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, azaz

$$2c + c > 10 \text{ és } 10 + 5 > 3c\text{, amiből } \frac{10}{3} < c < \frac{15}{3},$$

és mivel $c \approx 4{,}08$, ez teljesül.

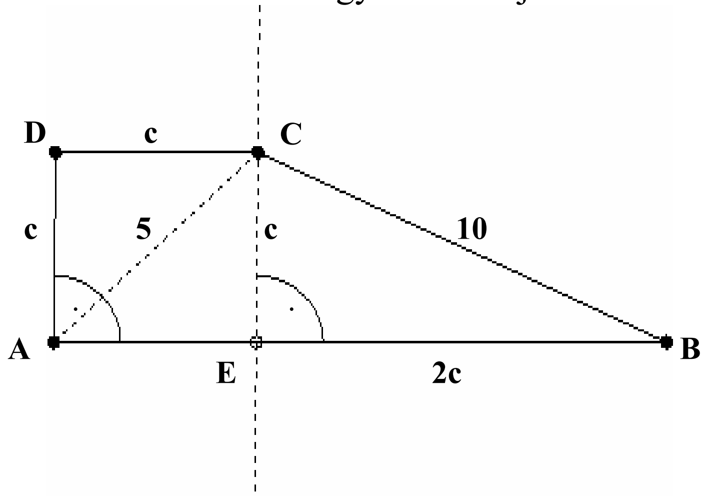
Könnyen látható, hogy teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek az ACE háromszögre is. $(2c > 5)$ (1 pont)

Összesen:10 pont

Megjegyzés

Ha a trapéz A csúcsánál levő belső szögét tompaszögnek vennénk, ez fenti megoldásunkat nem befolyásolná.
Ha azonban az A csúcsnál levő belső szög derékszög lenne, akkor a következő ábra derékszögű háromszögeire felírt Pitagorasz-tételekből is látható, hogy egymásnak ellentmondó

$2c^2 = 25$ és $5c^2 = 100$ egyenletekre jutnánk.



Ezért ez az eset nem lehetséges, tehát a derékszögű trapéz nem felelne meg a feladat feltételeinek.

4. Bizonyítsa be, hogy $2006^{2007} + 2008^{2006} + 2007$ osztható 7-tel!

Megoldás:

Vezessünk be jelöléseket!

Legyen: $A_1 = 2006^{2007}$; $A_2 = 2008^{2006}$; $A_3 = 2007$, $A = A_1 + A_2 + A_3$!

Észrevesszük, hogy

$$2002 = 286 \cdot 7, \; 2009 = 287 \cdot 7,$$

ezért

$$2006 = 286 \cdot 7 + 4; \quad 2008 = 287 \cdot 7 - 1; \quad 2007 = 287 \cdot 7 - 2$$

azaz

$$A_1 = (286 \cdot 7 + 4)^{2007},$$
$$A_2 = (287 \cdot 7 - 1)^{2006},$$
$$A_3 = 287 \cdot 7 - 2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az A_1 szám binomiális tétel szerint kifejtett alakjában csak az utolsó tag nem osztható 7-tel, ez pedig

$$\binom{2007}{2007} \cdot 4^{2007} = 4^{2007},$$

azaz

(1) $$A_1 = 7k + 4^{2007}. \; (k \in N) \qquad \text{(1 pont)}$$

Továbbalakíthatjuk a 4^{2007}-t:

$$4^{2007} = 4^{3 \cdot 669} = (4^3)^{669} = 64^{669} = (9 \cdot 7 + 1)^{669}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek a binomiális tétel szerint kifejtett alakjában is csak egyetlen tag nem osztható 7-tel, nevezetesen

$$\binom{669}{669} \cdot 1^{669} = 1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezek szerint a 4^{2007} szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.

(2) $$4^{2007} = 7l + 1, \; (l \in N)$$

(1) és (2) alapján:

(3) $$A_1 = 7k + 7l + 1.$$ (1 pont)

Hasonlóan látható be, hogy az A_2 kifejtésében szereplő tagok közül csak a

$$\binom{2006}{2006} \cdot (-1)^{2006}$$

nem osztható 7-tel, ez viszont +1-gyel egyenlő, azaz

(4) $$A_2 = 7m + 1. \ (m \in N)$$ (2 pont)

(3) és (4) valamint A_3 behelyettesítése alapján láthatjuk, hogy

$$A = (7k + 7l + 1) + (7m + 1) + (7 \cdot 287 - 2) = 7n,$$

és mivel $k, l, m \in N$ ezért $n \in N$

vagyis $2006^{2007} + 2008^{2006} + 2007$ valóban osztható 7-tel. (1 pont)

Összesen: 10 pont

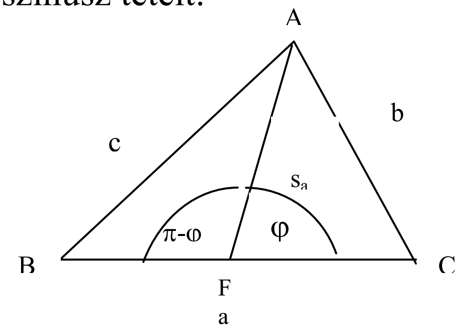
5. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges háromszög a,b,c-vel jelölt oldalai között akkor és csak akkor áll fenn az $a \le b \le c$ egyenlőtlenség, ha az s_a, s_b, s_c-vel jelölt súlyvonalakra fennáll az $s_a \ge s_b \ge s_c$ egyenlőtlenség!

Megoldás:

Felhasználjuk a háromszögek súlyvonalainak négyzetére érvényes következő összefüggéseket:

(1) $$s_a{}^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4},\ s_b{}^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4},\ s_c{}^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

Az (1) összefüggések igazolhatók úgy, hogy az ABF és az ACF háromszögekre (ahol AF súlyvonal) felírjuk a koszinusz tételt:



$$c^2 = \frac{a^2}{4} + s^2{}_a - 2\frac{a}{2}s_a\cos(\pi-\varphi),$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + s^2{}_a - 2\frac{a}{2}s_a\cos\varphi,$$

ámde

$$\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi,$$

ezért az előző két egyenletet összeadva:

$$c^2+b^2 = \frac{a^2}{2} + 2s^2{}_a,$$

amiből

$$s^2{}_a = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

Hasonlóan igazolható (1) másik két egyenlősége is. (2* pont)

Rátérve a tétel első részének bizonyítására, tegyük fel, hogy

$$s_a \ge s_b,$$

ekkor az is teljesül, hogy

$$4s_a{}^2 \ge 4s_b{}^2,$$

vagyis (1) miatt:

$$2b^2+2c^2-a^2 \ge 2a^2+2c^2-b^2.$$

Rendezés után $3a^2 \le 3b^2$, majd a négyzetgyökvonás után (az a,b számok nyilván pozitívak),

$$a \le b$$

következik. (2 pont)

Hasonlóan igazolható, hogy ha $s_b \geq s_c$, akkor $b \leq c$, és ezzel a feladat első részét bizonyítottuk. (1 pont)

Megfordítva, ha

$$a \leq b \quad ,$$

akkor

$$3a^2 \leq 3b^2,$$

és így

$$2b^2 - a^2 \geq 2a^2 - b^2,$$

ebből pedig

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq 2a^2 + 2c^2 - b^2$$

illetve

(2) $$\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \geq \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

következik.

Az (1) összefüggéseket (2)-be írva:

$$s_a^{\,2} \geq s_b^{\,2},$$

és mivel s_a és s_b pozitív számok, ezért

$$s_a \geq s_b.$$ (3 pont)

Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $b \leq c$, akkor $s_b \geq s_c$ teljesül, ezzel az állítás megfordítását is igazoltuk. (1 pont)

A feladatban megfogalmazott állítást mindkét irányban bizonyítottuk, ezért valóban igaz, hogy egy tetszőleges háromszög a, b, c-vel jelölt oldalai között akkor és csak akkor áll fenn az $a \leq b \leq c$ egyenlőtlenség, ha az s_a, s_b, s_c súlyvonalakra fennáll az $s_a \geq s_b \geq s_c$ egyenlőtlenség. (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
A 2* pont akkor is megadható, ha a súlyvonal oldalakkal való kifejezésének bizonyítását nem írja le a versenyző, de egyértelműen hivatkozik arra, hogy honnan ismeri.

6. András és Balázs kosárra dobásban méri össze tudását. Annak valószínűsége, hogy András a kosárba talál 0,7 , míg Balázs 0,4 valószínűséggel dob kosarat.
Egy játszmában mindegyikük egyszer dob.
Ha András talál, és Balázs nem, akkor András nyer.
Ha Balázs talál, és András nem, akkor Balázs nyer.
Minden más esetben a játszma eredménye döntetlen.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy két egymás utáni játszma mindegyike döntetlen lesz?

I. megoldás:

Egy játszma eredménye kétféle módon lehet döntetlen.

Első esetben úgy, hogy ha mindketten sikeres dobást hajtanak végre. Jelöljük ezt az eseményt X-szel.
Nyilvánvaló, hogy András és Balázs dobása egymástól független, ezért az X esemény bekövetkezésének valószínűsége a külön-külön vett valószínűségek szorzata, azaz

(1) $$P(X) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28\,.$$ (2 pont)

Egy játszma úgy is lehet döntetlen, ha a dobást mindketten elvétik. Legyen ennek az eseménynek a jele Y.

Mivel András sikeres illetve sikertelen dobása egymást kizáró események, ezért valószínűségeik összege 1. Így annak valószínűsége, hogy

András nem talál: $1 - 0{,}7 = 0{,}3$,

hasonlóképpen

Balázs rossz dobásának valószínűsége: $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

(2 pont)

András és Balázs rossz dobása ismét két egymástól független esemény, tehát az előzőhöz hasonlóan Y valószínűsége a külön-külön vett valószínűségek szorzata. Ebből következik, hogy:

(2) $$P(Y) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18\,.$$ (2 pont)

Az X és Y események kizárják egymást, ezért egyetlen játszma döntetlen eredményének valószínűsége:

$$P(X) + P(Y) = 0{,}46\,.$$ (2 pont)

Ha két egymás utáni játszma eredménye döntetlen, akkor ezt az eseményt jelöljük Z-vel!

Az egymás utáni játszmák függetlenek, tehát annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni játszma mindegyike döntetlen lesz:

$$P(Z)=[P(X)+P(Y)]^2=0{,}46^2=0{,}2116.$$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Természetesen jó megoldás:

$$1-[0{,}7(1-0{,}4)+0{,}4(1-0{,}7)]=0{,}46.$$

II. megoldás:

Bevezetjük a következő jelöléseket:

András talál: a_i; ennek valószínűsége: $P(a_i)=0{,}7$
András nem talál: a_n; ennek valószínűsége: $P(a_n)=1-0{,}7=0{,}3$
Balázs talál: b_i; ennek valószínűsége: $P(b_i)=0{,}4$
Balázs nem talál: b_n; ennek valószínűsége: $P(b_n)=1-0{,}4=0{,}6$
András nyer: ***A***; Balázs nyer: ***B***; döntetlen a játszma: ***D***.

A lehetséges dobássorozatok és eredményük:
(Tegyük fel, hogy András, Balázs, András, Balázs sorrendben dobnak. Az egy dobáson belüli sorrend a feladat szempontjából lényegtelen, csak a dobások eredménye számít.)

Eredmények:

1.	$a_ib_i\ a_ib_i$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_i)\cdot P(a_i)\cdot P(b_i)$	***DD***
2.	$a_ib_i\ a_ib_n$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_i)\cdot P(a_i)\cdot P(b_n)$	***DA***
3.	$a_ib_i\ a_nb_i$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_i)\cdot P(a_n)\cdot P(b_i)$	***DB***
4.	$a_ib_i\ a_nb_n$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_i)\cdot P(a_n)\cdot P(b_n)$	***DD***
5.	$a_ib_n\ a_ib_i$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_n)\cdot P(a_i)\cdot P(b_i)$	***AD***
6.	$a_ib_n\ a_ib_n$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_n)\cdot P(a_i)\cdot P(b_n)$	***AA***
7.	$a_ib_n\ a_nb_i$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_n)\cdot P(a_n)\cdot P(b_i)$	***AB***
8.	$a_ib_n\ a_nb_n$	valószínűsége: $P(a_i)\cdot P(b_n)\cdot P(a_n)\cdot P(b_n)$	***AD***
9.	$a_nb_i\ a_ib_i$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_i)\cdot P(a_i)\cdot P(b_i)$	***BD***
10.	$a_nb_i\ a_ib_n$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_i)\cdot P(a_i)\cdot P(b_n)$	***BA***
11.	$a_nb_i\ a_nb_i$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_i)\cdot P(a_n)\cdot P(b_i)$	***BB***
12.	$a_nb_i\ a_nb_n$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_i)\cdot P(a_n)\cdot P(b_n)$	***BD***
13.	$a_nb_n\ a_ib_i$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_n)\cdot P(a_i)\cdot P(b_i)$	***DD***
14.	$a_nb_n\ a_ib_n$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_n)\cdot P(a_i)\cdot P(b_n)$	***DA***
15.	$a_nb_n\ a_nb_i$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_n)\cdot P(a_n)\cdot P(b_i)$	***DB***
16.	$a_nb_n\ a_nb_n$	valószínűsége: $P(a_n)\cdot P(b_n)\cdot P(a_n)\cdot P(b_n)$	***DD***

Pontozás:

Valamennyi eset felsorolása: (6 pont)*

Mindkét játszma döntetlen az 1. a 4. a 13. és a 16. sorozatban.
A keresett valószínűség e négy játszma valószínűségének összege:

(2 pont)

$$0{,}7^2\cdot 0{,}4^2 + 0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 + 0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4 + 0{,}3^2\cdot 0{,}6^2 =$$
$$7(0{,}7\cdot 0{,}4 + 0{,}3\cdot 0{,}6)^2 = \mathbf{0{,}2116}$$

(2 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

1. Ha a versenyző felsorolja az eseteket, de a valószínűségeket rosszul számolja (összeadás, illetve szorzásjel tévesztés) legfeljebb 2 pontot kaphat.
2. * a 6 pontot akkor is megkaphatja, ha csak a dupla döntetlen eseteket indoklással felsorolja.
3. * Indoklás nélkül a négy „jó” eset felsorolása legfeljebb 4 pont.