Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007/2008
Matematika I. kategória (szakközépiskolák)
A 2. forduló feladatainak megoldása

1. Legyen

$$f(x)=\log_2\left(tgx+\frac{1}{\cos x}\right)$$

és

$$g(x)=\frac{2^{f(x)}-2^{-f(x)}}{2},$$

minden olyan valós x-re, amelyre a szereplő függvények értelmezhetők.

Mennyi $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ pontos értéke?

Megoldás:

Az $f(x)$ függvény olyan x valós számokra értelmezhető, amelyekre egyrészt $\cos x\neq 0$, másrészt a logaritmus értelmezése miatt $tgx+\frac{1}{\cos x}>0$.

Ez utóbbi egyenlőtlenséget átírhatjuk a

$$\frac{\sin x+1}{\cos x}>0$$

alakba.

Ennek az egyenlőtlenségnek megfelelő valós számok eleget tesznek a

(1) $$-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi, \qquad (k\in Z)$$

kettős egyenlőtlenségnek, és ezekre a valós számokra $\cos x\neq 0$ is teljesül.

(2 pont)

A fenti feltételeknek eleget tevő valós számokra a logaritmus definíciója miatt

(2) $$2^{f(x)}=2^{\log_2\left(tgx+\frac{1}{\cos x}\right)}$$

$$2^{f(x)}=tgx+\frac{1}{\cos x}$$

$$2^{f(x)}=\frac{\sin x+1}{\cos x}.$$

(2 pont)

Továbbá:

$$2^{-f(x)}=\frac{1}{2^{f(x)}},$$

és mivel $2^{f(x)} > 0$ (azaz $\neq 0$), ezért ez értelmezett az (1) feltétel mellett,

$$2^{-f(x)} = \frac{1}{tgx + \frac{1}{\cos x}}$$

(3) $$2^{-f(x)} = \frac{\cos x}{\sin x + 1}\ .$$ (2 pont)

Az (1) feltétel mellett ennek nevezője sem 0, tehát értelmezett.

A (2) és (3) összefüggésekből következik, hogy

$$g(x) = \frac{\frac{\sin x + 1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x + 1}}{2},$$

ez pedig átalakítható a következőképpen:

(4) $$g(x) = \frac{(\sin x + 1)^2 - \cos^2 x}{2 \cdot \cos x \cdot (\sin x + 1)} = \frac{\sin^2 x + 2 \cdot \sin x + 1 - \cos^2 x}{2 \cdot \cos x \cdot (\sin x + 1)}.$$ (1 pont)

(4)-ből az $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ trigonometriai azonosság alapján

(5) $$g(x) = \frac{2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x}{2 \cdot \cos x \cdot (\sin x + 1)}$$ (1 pont)

adódik.

(5)-ben a számláló szorzattá alakítása után

$$g(x) = \frac{2 \cdot \sin x \cdot (\sin x + 1)}{2 \cdot \cos x \cdot (\sin x + 1)},$$

amelyből egyszerűsítéssel:

(6) $$g(x) = tgx\ .$$ (1 pont)

Mivel $x = \frac{\pi}{4}$ megfelel az (1) feltételeknek, ezért $g(x\ )$ ezen a helyen létezik, és (6) alapján

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ .$$ <u>(1 pont)</u>

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha a versenyző az elejétől kezdve a numerikus értékkel dolgozik, akkor a pontozás az alábbi legyen:

$$tg\frac{\pi}{4} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ (2 pont)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \log_2(1 + \sqrt{2})$$ (2 pont)

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}{2}$$ (2 pont)

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ (2 pont)

Annak megmutatása, hogy $\frac{\pi}{4}$-re minden szereplő függvény értelmezett volt

(2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Tekintse a

$$p(x)=(5x-2)\cdot(2x+4)\cdot(x-251)$$

és a

$$q(x)=(a-b+c)\cdot x^3+(3a+b-c)\cdot x^2+(a+b+c)\cdot x+d$$

polinomokat!

Határozza meg az a, b, c és d valós számokat úgy, hogy

$$p(x)=q(x)$$

minden valós x-re teljesüljön!

Megoldás:

A $p(x)=(5x-2)\cdot(2x+4)\cdot(x-251)$ polinomban végezzük el a kijelölt műveleteket!

A műveletek végrehajtása és rendezés után kapjuk, hogy:

(1) $$p(x)=10x^3-2494x^2-4024x+2008.$$ (2 pont)

A $p(x)=q(x)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden valós x-re,

ha az (1)-ben adott $p(x)=10x^3-2494x^2-4024x+2008$,

és a

$$q(x)=(a-b+c)\cdot x^3+(3a+b-c)\cdot x^2+(a+b+c)\cdot x+d$$

polinomok együtthatói rendre megegyeznek. (1 pont)

Eszerint

$$d=2008,$$ (1 pont)

továbbá:

(2) $$a-b+c=10,$$

(3) $$3a+b-c=-2494,$$

(4) $$a+b+c=-4024.$$ (2 pont)

Az a,b,c számokat a (2)-(3)-(4) egyenletekből álló lineáris egyenletrendszer megoldása adja.

Megoldásul azt kapjuk, hogy

$$a = -621,$$

$$b = -2017,$$

$$c = -1386. \qquad \text{(3 pont)}$$

Tehát a $p(x) = (5x-2)\cdot(2x+4)\cdot(x-251)$ és a

$$q(x) = (a-b+c)\cdot x^3 + (3a+b-c)\cdot x^2 + (a+b+c)\cdot x + d$$

polinomok pontosan akkor egyenlők minden valós x-re, ha

$$a = -621,\ b = -2017,\ c = -1386,\ d = 2008. \qquad \text{(1 pont)}$$

Összesen: 10 pont

3. Az a_n és b_n számsorozatokat az alábbi módon definiáljuk:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

és

$$b_n = n \cdot a_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}.$$

Határozza meg b_{2008} értékét!

Megoldás:

A b_n átalakítható a következőképpen:

(1) $$b_n = (a_n - a_1) + (a_n - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + a_n. \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad \ldots,$$

$$a_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1},$$

ezért az (1)-ben szereplő zárójeles kifejezések

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

segítségével rendre kifejezhetők a következő alakban:

$$a_n - a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

$$a_n - a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}, \ldots,$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek alapján látható, hogy a b_n összegben

az $\frac{1}{n}$ tag éppen n-szer,

az $\frac{1}{n-1}$ tag éppen $n-1$-szer,

általában az $\frac{1}{k}$ tag éppen k-szor

szerepel,(ahol $k=1,2,3,\ldots,n$), azaz:

(2) $$b_n = n\cdot\frac{1}{n} + (n-1)\cdot\frac{1}{n-1} + (n-2)\cdot\frac{1}{n-2} + \ldots + 2\cdot\frac{1}{2} + 1.$$ (3 pont)

A (2)-beli összeg tagjainak mindegyike 1, az összeg tagjainak száma pedig n.

Ebből következik, hogy

$$b_n = n,$$ (2 pont)

így

$$b_{2008} = 2008.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

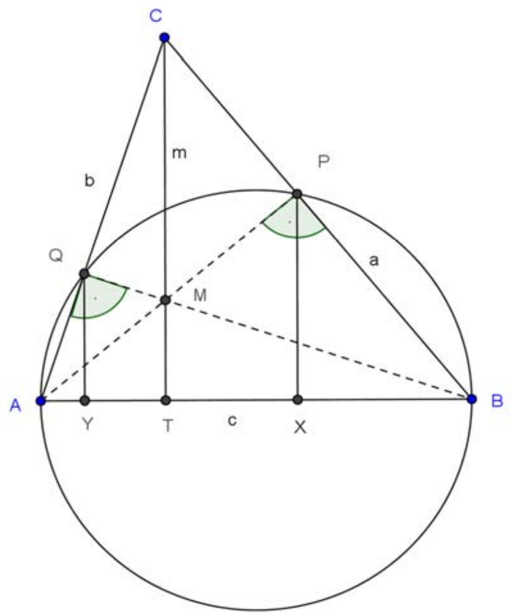
4. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala, mint átmérő fölé rajzolt kör a BC szakaszt a P, az AC szakaszt a Q pontban metszi. Legyenek a P és a Q pontokból az AB-re bocsátott merőlegesek talppontjai X és Y!
Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{PX}{QY} = \frac{b^2 \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{a^2 \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2\right)},$$

ahol a, b, c az ABC háromszög oldalhosszait jelentik!

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.



Legyen a szokásos jelölés szerint $BAC\angle = \alpha$ és $ABC\angle = \beta$.

A Thalész-tétel miatt $APB\angle = AQB\angle = 90°$, eszerint az AP és BQ szakaszok az ABC háromszög magasságvonalai, és ezek M metszéspontja az ABC háromszög magasságpontja.

Ezért az ábrán az M ponton átmenő CT egyenes merőleges az AB szakaszra, így CT párhuzamos a PX és QY szakaszokkal.
Mivel a háromszög hegyesszögű, ezért P,Q,T a megfelelő oldalak belső pontjai (2 pont)

A bizonyítandó összefüggést az ABC háromszögre felírt koszinusztételek segítségével átírjuk, ugyanis ezekből következik, hogy:

(1) $$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos\beta,$$

és

(2) $$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos\alpha.$$ (1 pont)

Ezért:

(3) $$\frac{PX}{QY}=\frac{b\cdot\cos\beta}{a\cdot\cos\alpha},$$

elegendő tehát (3)-at bizonyítani. (2 pont)

Mivel $CT=m$ párhuzamos a PX és QY szakaszokkal, ezért felírható a párhuzamos szelőszakaszok tétele β illetve α szögekre:

$$\frac{PX}{m}=\frac{BP}{a}, \text{ illetve } \frac{QY}{m}=\frac{AQ}{b},$$

ahonnan

(4) $$\frac{PX}{QY}=\frac{b\cdot BP}{a\cdot AQ}.$$

(3) és(4) figyelembe vételével most már csak a

(5) $$\frac{BP}{AQ}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

összefüggést kell bizonyítani. (2 pont)

Ennek bizonyítására felírjuk az ABQ, és az ABP derékszögű háromszögekben a

$$BAC\angle=\alpha \text{ és az } ABC\angle=\beta$$

szögek koszinuszát:

$$\cos\alpha=\frac{AQ}{c}, \text{ illetve } \cos\beta=\frac{BP}{c},$$

ezekből az

$$AQ=c\cdot\cos\alpha \text{ és } BP=c\cdot\cos\beta$$

miatt

$$\frac{BP}{AQ}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

következik, vagyis (5) helyességét beláttuk. (2 pont)

Ezzel a (3)-ban szereplő

$$\frac{PX}{QY}=\frac{b\cdot\cos\beta}{a\cdot\cos\alpha}$$

összefüggést bebizonyítottuk, így a vele ekvivalens,eredeti

$$\frac{PX}{QY}=\frac{b^2\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{a^2\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)}$$

állítást is igazoltuk. <u>(1 pont)</u>

Összesen: 10 pont

5. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet, ha p pozitív prímszám:

$$\sqrt{x^2-2x-3-p^2}+\sqrt{x^2-2x-3+p^2}=p^2\,!$$

Megoldás:

A négyzetgyök értelmezése miatt kell, hogy

(1) $$x^2-2x-3-p^2\geq 0\text{, és}$$

$$x^2-2x-3+p^2\geq 0$$

teljesüljön. (1 pont)

Legyen a továbbiakban

$$x^2-2x-3=y\,!$$

A feladat megoldását az egész számok halmazán keressük, ezért x és vele együtt y egész szám. (1 pont)

A kiinduló egyenlet az új ismeretlen bevezetése után:

(2) $$\sqrt{y-p^2}+\sqrt{y+p^2}=p^2.$$

(2) mindkét oldalát négyzetre emelve

$$y-p^2+y+p^2+2\cdot\sqrt{y^2-p^4}=p^4,$$

amelyből rendezés után a

(3) $$2\cdot\sqrt{y^2-p^4}=p^4-2y$$

egyenletre jutunk.

(3) mindkét oldalát négyzetre emeljük a $p^4-2y\geq 0$ feltétel mellett,

ezzel

$$4\cdot\left(y^2-p^4\right)=p^8-4p^4\cdot y+4y^2$$

adódik, majd a műveletek elvégzése és rendezés,valamint szorzattá bontás után:

(4) $$p^4\cdot\left(p^4-4y+4\right)=0.$$ (3 pont)

Mivel p pozitív, ezért $p\neq 0$, így (4) csak úgy teljesülhet, ha

$$p^4-4y+4=0,$$

azaz ha

$$p^4=4y-4,$$

ebből pedig az $x^2-2x-3=y$ visszahelyettesítésével:

(5) $$p^4=4x^2-8x-16$$

adódik. (1 pont)

Mivel $x \in Z$, ezért (5) jobb oldala páros szám, így p^4 is páros, ez viszont csak $p = 2$ esetén lehetséges. (1 pont)

Ezzel (5)-ből előbb a

$$4x^2 - 8x - 32 = 0,$$

majd egyszerűsítés után az

(6) $$x^2 - 2x - 8 = 0$$

egyenletre jutunk.

(6) gyökei az

$$x_1 = -2 \quad \text{és } x_2 = 4$$

egész számok. (1 pont)

Számolással ellenőrizhető, hogy ezek a számok megfelelnek az (1)-beli

$$x^2 - 2x - 3 - p^2 \geq 0 \text{ és } x^2 - 2x - 3 + p^2 \geq 0$$

feltételű egyenlőtlenségeknek is, továbbá megoldásai az eredeti egyenletnek:

$p=2$	$x^2 - 2x - 3 - p^2 \geq 0$	$x^2 - 2x - 3 + p^2 \geq 0$	$\sqrt{x^2 - 2x - 3 - p^2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3 + p^2} = p^2$
$x_1=-2$	$1>0$	$9>0$	$1+3=2^2$
$x_2=4$	$1>0$	$9>0$	$1+3=2^2$

(2pont)

összesen 10 pont

Megjegyzés 1.:

p=2 kiolvasható már akár (3)-ból, akár (4)-ből, és akkor y=5 rövidebben adódik. Természetesen így dolgozva is megkapja a versenyző a megfelelő pontokat (3+1+1)

Megjegyzés 2.:

Belátható, hogy $p^4 - 2y \geq 0$ is teljesül.