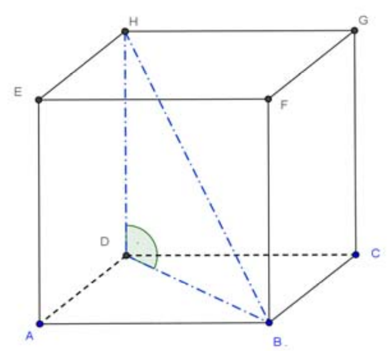
Az 1. forduló feladatainak megoldása

1. Bizonyítsa be, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető, és ennek a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!

Megoldás:
az $ABCDEFGH$ kocka B csúcsát kössük össze a D és H csúcsokkal (1. ábra)!



1. ábra

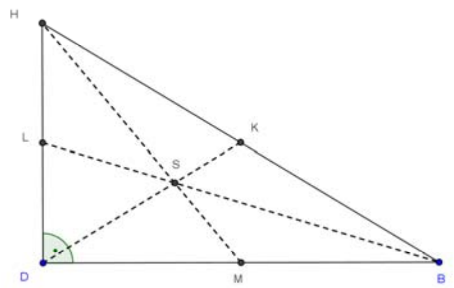
A BHD háromszögben
a DH szakasz hossza a kocka élével egyenlő,
a BD szakasz a kocka lapátlója,
a BH szakasz pedig a kocka testátlója.
Ezzel beláttuk, hogy a kocka éléből, lapátlójából és testátlójából háromszög szerkeszthető. (1 pont)

Mivel a kocka DH éle merőleges az $ABCD$ lapra, ezért merőleges annak minden egyenesére is, tehát DH merőleges a BD szakaszra, vagyis a BHD háromszög derékszögű, amelynek derékszögű csúcsa a D pont, és oldalai:

a kocka éle: $DH = a$,
a kocka lapátlója: $BD = a\sqrt{2}$,
a kocka testátlója: $BH = a\sqrt{3}$.

(Ezek a BDA illetve a BHD derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz tételekből adódnak.) (2 pont)

A feladat második részének bizonyításához újabb ábrát készítünk (2. ábra).



2. ábra

A BHD háromszög oldalfelező pontjai K, L és M, a háromszög súlypontja S, mint a 2. ábrán látjuk.

Bizonyítjuk, hogy a DK és HM súlyvonalak merőlegesek egymásra. Ehhez elegendő belátni, hogy $DS \perp SH$, azaz a HDS háromszög S szöge derékszög, azaz erre a háromszögre érvényes a Pitagorasz tétel megfordítása: két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével. (1*pont)

A BHD derékszögű háromszög körülírt körének középpontja K,

$$KB = KH = KD,$$

de $BH = a\sqrt{3}$,

(1) így $KD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A súlypont ismert tulajdonsága alapján

$$SD = \frac{2}{3}KD,$$

ezt (1)-gyel összevetve kapjuk, hogy:

(2) $$SD = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}.$$ (2 pont)

Az MHD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$MH^2 = DH^2 + MD^2.$$

A már tudott

$$DH = a \text{ és } MD = \frac{BD}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$$

értékek behelyettesítése és a műveletek elvégzése után:

(3) $$MH = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{2}.$$

Mivel

$$HS = \frac{2}{3}MH,$$

ezért (3) alapján:

(4) $$HS = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{3}.$$ (2 pont)

A 2. ábra HDS háromszögében

$$DH = a,$$

$$SD = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{3},$$

$$HS = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{3},$$

(ahogy (2)-ben illetve (4)-ben kaptuk).
Felírjuk a HDS háromszögre két oldala négyzetének összegét:

$$SD^2 + HS^2 = \left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\cdot\sqrt{6}}{3}\right)^2,$$

a műveleteket elvégezve

$$SD^2 + HS^2 = a^2,$$

azaz

$$SD^2 + HS^2 = DH^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a HDS háromszög derékszögű és a derékszögű csúcsa éppen az S pont.
Eszerint a BHD háromszögben a DK és HM súlyvonalak valóban merőlegesek egymásra. (2 pont)

összesen 10 pont

Megjegyzések:

- az útmutatóban jelzett 1* pont nem jár, ha a versenyző a Pitagorasz-tétel megfordítása helyett a Pitagorasz-tételre hivatkozik.
- DK és HM súlyvonalak merőlegessége vektorok skaláris szorzata segítségével is bizonyítható, például úgy, hogy a D kezdőpontú $\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DH}$ vektorok segítségével kifejezzük a $\overrightarrow{DK}$ és $\overrightarrow{HM}$ vektorokat, majd

bizonyítjuk, hogy ezek skaláris szorzata zérus. Ha a versenyző ezt a módszert választja, akkor természetesen helyes megoldás esetén teljes pontszámot kap.

2. Legyenek az a,b,c,d számok pozitív valós számok. Igazolja, hogy

$$\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d} \le \sqrt{(a+d) \cdot (b+c)}\,!$$

1. Megoldás:

A feltétel alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldala értelmezett, továbbá a négyzetgyök definíciója miatt mindkét oldalán pozitív számok állnak, ezért az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük: (a jobboldalon a beszorzást is elvégeztük)

(1) $$a \cdot b + c \cdot d + 2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \le a \cdot b + a \cdot c + d \cdot b + d \cdot c$$ (3 pont)

(1)-ből rendezés után előbb

$$2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \le a \cdot c + d \cdot b,$$

ebből pedig

(2) $$\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \le \frac{a \cdot c + b \cdot d}{2},$$

adódik, amit tovább rendezve:

$$\sqrt{(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)} \le \frac{(a \cdot c) + (b \cdot d)}{2}.$$ (2 pont)

A (2) állítás pedig nyilvánvalóan igaz, hiszen ez éppen az $(a \cdot c)$ és $(b \cdot d)$ pozitív számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség. (2 pont)

A bizonyítási lépések mindegyike során a megelőzővel ekvivalens egyenlőtlenséget kaptunk, lépéseink tehát megfordíthatók, azaz (2)-ből logikai úton visszafelé haladva következik a bizonyítandó állítás. (1 pont)

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $(a \cdot c) = (b \cdot d)$. (2 pont)

összesen 10 pont

2. Megoldás:

(1)-ig azonos az 1. megoldással. (3pont)

Folytatása:

$$2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \leq a \cdot c + d \cdot b\,.$$

Újabb négyzetreemelés után:

$$4abcd \leq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd\,.$$ (2 pont)

Átalakítva:

$$0 \leq a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2\,,$$

$$0 \leq (ac - bd)^2\,,$$ (2 pont)

ami igaz és ekvivalens az eredetivel is. (1 pont)

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $(a \cdot c) = (b \cdot d)$. (2 pont)

összesen 10 pont

3. Ha az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x+3y+5z=200$$

és az

$$x+4y+7z=225$$

egyenleteknek, akkor mennyi a

$$K=x+y+z$$

kifejezés értéke?

1. Megoldás:

Az $x+3y+5z=200$ egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozva kapjuk, hogy:

(1) $$3x+9y+15z=600.$$ (3 pont)

Következő lépésként 2-vel szorozzuk az $x+4y+7z=225$ egyenlet mindkét oldalát, ekkor:

(2) $$2x+8y+14z=450.$$ (3 pont)

Ha (1) és (2) megfelelő oldalait kivonjuk egymásból, akkor:

(3) $$x+y+z=150.$$ (3 pont)

Mivel $K=x+y+z$, ezért az adott feltételek mellett kaptuk, hogy a $K=x+y+z$ kifejezés értéke pontosan 150. (1 pont)

összesen 10 pont

2. Megoldás:

Ebben a megoldásban először kifejezzük y-t x segítségével úgy, hogy az adott egyenletekből kiküszöböljük z-t, például a következőképpen:

$x+3y+5z=200$ egyenlet mindkét oldalát 7-tel, majd
$x+4y+7z=225$ mindkét oldalát 5-tel szorozzuk:

(1) $$7x+21y+35z=1400,$$

illetve

(2) $$5x+20y+35z=1125.$$ (2 pont)

(1) és (2) megfelelő oldalainak különbségéből adódik, hogy

$$2x + y = 275,$$

és innen

(3) $$y = 275 - 2x.$$ (2 pont)

Ezután a z számot fejezzük ki ugyancsak x segítségével oly módon, hogy az egyenletekből kiküszöböljük y-t, például a következő módon:

az $x + 3y + 5z = 200$ egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd az $x + 4y + 7z = 225$ egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozzuk:

(4) $$4x + 12y + 20z = 800,$$

és

(5) $$3x + 12y + 21z = 675.$$ (2 pont)

(4) és (5) megfelelő oldalainak különbségéből kapjuk, hogy

$$x - z = 125,$$

amiből

(6) $$z = x - 125.$$ (2 pont)

Helyettesítsük most a (3) és (6) összefüggéseket a $K = x + y + z$ kifejezésben y és z helyébe!

Ezzel

$$K = x + (275 - 2x) + (x - 125),$$

tehát

$$K = 150.$$ (2 pont)

összesen 10 pont

Megjegyzés:

Az a versenyző, aki az $(x; y; z)$ számhármas egyikének konkrét megválasztása után oldja meg az $x + 3y + 5z = 200$ és az $x + 4y + 7z = 225$ egyenletrendszert, és a $K = x + y + z$ kifejezés értékét így számolja ki, legfeljebb 3 pontot kaphat.

4. Oldja meg a valós számok halmazán az

$$\frac{[x]}{\{x\}} = 2008$$

egyenletet!

($[x]$ az x valós szám egészrésze, azaz az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb, $\{x\}$ pedig az x valós szám törtrésze, azaz $\{x\} = x - [x]$)

Megoldás:

Mivel nevezőben 0 nem lehet, ezért

(1) $$\{x\} \neq 0$$

azaz x nem lehet egész szám. (2 pont)

A kiindulási egyenletet átalakítva:

(2) $$\{x\} = \frac{[x]}{2008}$$

következik. (1 pont)

Felhasználjuk azt, hogy az x valós szám törtrésze 1-nél kisebb, és nem negatív, így (1)-et figyelembe véve:

$$0 < \{x\} < 1,$$

(2)-t behelyettesítve:

$$0 < \frac{[x]}{2008} < 1,$$

amiből

(3) $$0 < [x] < 2008.$$ (3 pont)

(3)-ból kapjuk, hogy $[x] = n$, ahol $n \in \{1,...,2007)\}$,

(2)-ből adódik, hogy $\{x\} = \frac{n}{2008}$, ahol $n \in \{1,...,2007)\}$,

tehát $$x = [x] + \{x\}$$

miatt $$x = n + \frac{n}{2008},$$

ahol n az $\{1,2,...2007\}$ számhalmaz elemeinek bármelyike lehet. (3 pont)

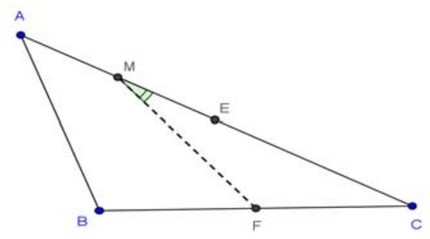
Az ellenőrzés a kapott megoldások helyességét mutatja:

$$\frac{n}{\frac{n}{2008}} = 2008.$$ (1 pont)

összesen 10 pont

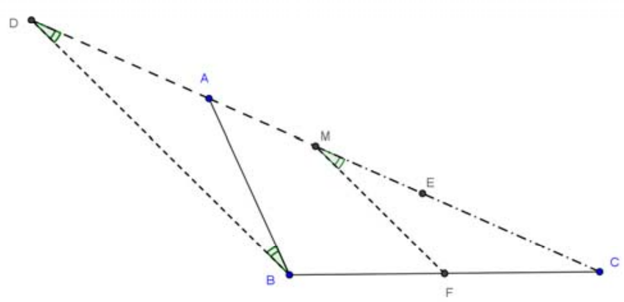
5. Az ABC háromszög AC oldalán az E belső pont úgy helyezkedik el, hogy $EC = AB$. Legyen F a BC, M pedig az AE szakasz felezőpontja. Határozzuk meg az ABC háromszög A csúcsánál levő belső szögét, ha $FME\angle = 18°$!

<u>1. Megoldás:</u> készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát.



3. ábra

Forgassuk el az AB szakaszt az A pont körül úgy, hogy a B pont elforgatott képe az AC egyenesére, az A ponton túl kerüljön, és a B elforgatott képét jelöljük D-vel.



4. ábra (2 pont)

Mivel a feltétel szerint $EC = AB$, továbbá M az AE szakasz felezőpontja, ezért, az M pont az így létrejövő CD szakasznak is felezőpontja. (2 pont)

A 4. ábrán lévő $DCB\angle$ szárait az FM és BD szakaszokkal úgy metszettük el, hogy

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2},$$

ezért a párhuzamos szelők tételének megfordítása szerint az FM és BD szakaszok párhuzamosak. (2 pont)*

Ebből következik, hogy

$$BDA\angle = FME\angle = 18°.$$ (1 pont)

Ugyanakkor az ABD háromszög az $AB = AD$ miatt egyenlő szárú, ezért

(1) $$DBA\angle = BDA\angle = 18°.$$ (1 pont)

Az ABC háromszög A csúcsánál levő belső szöge az ABD háromszög A-nál lévő külső szöge, ezért

$$BAC\angle = BDA\angle + DBA\angle,$$ (1 pont)

így (1) felhasználásával

$$BAC\angle = 36^0.$$ (1 pont)

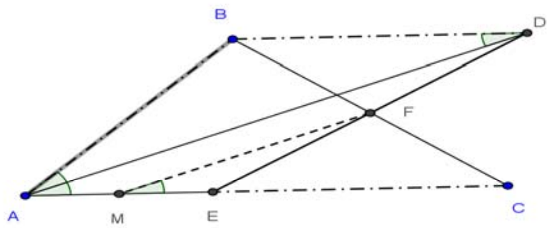
összesen 10 pont

Megjegyzés

* Természetesen ennél a résznél CDB háromszög MF középvonalának tulajdonságára való hivatkozást is elfogadjuk.

2. Megoldás:

Hosszabbítsuk meg az EF szakaszt az F ponton túl EF hosszával, így kaptuk az 5. ábrán a D pontot.



5. ábra

Az így keletkező $ECDB$ négyszög parallelogramma, mert az átlói felezik egymást. (3 pont)

Ezért a BD szakasz párhuzamos EC-vel és

$$BD = EC$$

továbbá a feladat feltételét figyelembe véve

$$EC = AB,$$

ezért

$$AB = BD.$$ (2 pont)

Mivel az AED háromszögben M és F oldalfelezőpontok, ezért MF az AED háromszög középvonala, így párhuzamos az AD szakasszal, (2 pont)

azaz

$$DAC\angle = FME\angle.$$

Továbbá:

$$ADB\angle = DAC\angle$$ (váltó szög)

és

$$ADB\angle = BAD\angle$$, (mert $BD = AB$).

Ezek következményeként

$$BAD\angle = 18^0$$

és

$$DAC\angle = 18^0,$$

ezek azt jelentik, hogy AD az ABC háromszög A csúcsánál levő belső szögének felezője,ekkor pedig

$$BAC\angle = 2BAD\angle = 36°$$

(3 pont)

összesen 10 pont

6. Hányféle módon állítható elő a 2008 néhány (egynél több) egymást követő pozitív egész szám összegeként?

Megoldás:

Legyen az előállításban szereplő első pozitív egész szám k, az összeadandó számok száma pedig n. A feladat szövege miatt $n>1$. (1 pont)
Ekkor a feltétel szerint:

(1) $$k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1)=2008.$$ (1 pont)

Az (1) baloldalán levő összeg egy $d=1$ különbségű számtani sorozat első n tagjának összege, amelynek első tagja a pozitív egész k szám, ezért a számtani sorozat összegképletéből:

$$\frac{n\cdot(2k+n-1)}{2}=2008,$$

átalakítva:

(2) $$n\cdot(2k+n-1)=4016.$$ (2 pont)

(2) bal oldalának mindkét szorzótényezője pozitív egész szám és a feltételek miatt egyik tényező értéke sem lehet 1, továbbá a két szorzótényező paritása különböző, (hiszen összegük páratlan pozitív egész). Mivel $4016=2^4\cdot 251$ (2 pont)

(a Függvénytáblázatból ellenőrizhető, hogy 251 prímszám), ezért a következő esetek lehetségesek:

a)
$$\begin{array}{l} n=16 \\ 2k+n-1=251 \\ \hline \end{array}$$

amiből
$$n=16,$$
$$k=118;$$ (1 pont)

vagy
b)
$$\begin{array}{l} n=251 \\ 2k+n-1=16 \\ \hline \end{array}$$

amiből

$$n=251,$$
$$k=-117.$$ (1 pont)

A b) eset nem felel meg a $k>0$ feltételnek, így nem ad megoldást. (1 pont)

Tehát a 2008 számot csak egyféleképpen tudjuk egynél több egymás utáni pozitív egészek összegeként előállítani, mégpedig a $k=118$ számból kiindulva 16 darab közvetlen egymás utáni pozitív egész számot összeadva a következőképpen:

$$118+119+120+\ldots+132+133=2008.$$ (1 pont)

összesen 10 pont