Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2009/2010
Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

A döntő feladatainak megoldása

1. **Feladat**

Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2\cos 2x + 2\sin^2 x}{2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 3\sin^2 x} + \frac{13\cos^2 x}{2\cos^4 x + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x} = 6$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználjuk a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, illetve a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ trigonometrikus azonosságokat, ezekkel a kiinduló egyenlet a következőképpen alakítható át:

$$\frac{2 \cdot \cos^2 x}{2 \cdot \cos^4 x - 5 \cdot \cos^2 x + 3} + \frac{13 \cdot \cos^2 x}{2 \cdot \cos^4 x + \cos^2 x + 3} = 6 .$$

Vezessük be az

$$y = \cos^2 x$$

jelölést, ezzel egyenletünk a következő alakú lesz:

(1) $$\frac{2 \cdot y}{2 \cdot y^2 - 5 \cdot y + 3} + \frac{13 \cdot y}{2 \cdot y^2 + y + 3} = 6 .$$ 1 pont

Az (1) egyenletben a törtek nevezői nem lehetnek 0 értékűek, így az első tört miatt:

$$y \neq 1 \text{ és } y \neq \frac{3}{2} .$$

A második tört nevezője minden lehetséges $y \in R$ értékre nagyobb 0-nál. Így a megoldásra kapott feltétel:

(2) $$y \in R \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}.$$ 1 pont

Mivel $y \neq 0$, ezért az (1) egyenlet bal oldalán szereplő törteket egyszerűsíthetjük y-nal.
Ekkor:

(3) $$\frac{2}{2 \cdot y - 5 + \frac{3}{y}} + \frac{13}{2 \cdot y + 1 + \frac{3}{y}} = 6.$$ 1 pont

Legyen
$$2 \cdot y - 5 + \frac{3}{y} = z,$$
ezzel a (3) egyenletből

(4) $$\frac{2}{z} + \frac{13}{z+6} = 6$$

adódik, ahonnan rendezés után

(5) $$2 \cdot z^2 + 7 \cdot z - 4 = 0$$

következik. (Ez ekvivalens átalakítás, mert $z \neq 0 \quad \textit{és} \quad z \neq -6$) 1 pont

Az (5) egyenlet gyökei: $z_1 = \frac{1}{2}$ és $z_2 = -4$. 1 pont

Elvégezve a visszahelyettesítéseket, $z_2 = -4$ esetén azt kapjuk, hogy
$$2 \cdot y^2 - y + 3 = 0,$$
ennek az egyenletnek nincs valós megoldása y-ra. 1 pont

Ha $z_1 = \frac{1}{2}$, akkor
$$4y^2 - 11 \cdot y + 6 = 0,$$
ennek az egyenletnek az
$$y_1 = 2 \text{ és az } y_2 = \frac{3}{4}$$
valós számok a megoldásai. (y_1 *és* y_2 eleget tesz a (2) feltételnek) 1 pont

Nyilvánvaló, hogy $y = \cos^2 x$ miatt $y_1 = 2$ nem ad megoldást x-re. 1 pont

Ha $y_2 = \frac{3}{4}$, azaz
$$\cos^2 x = \frac{3}{4},$$

akkor

$$\cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \cos x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

amiből

(6) $$x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z,$$

illetve

(7) $$x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in Z$$

adódik. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kapott megoldások az eredeti egyenletnek is gyökei. 1 pont

összesen: 10 pont

Megjegyzés:
Ha a $\cos^2 x = a \; és \; 2\cos^4 x + 3 = b$ jelölést vezetjük be, akkor (3) helyett a

$$\frac{2a}{b-5a} + \frac{13a}{b+a} = 6$$

egyenletet kapjuk.
Ebből

$$11\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0,$$

azaz

$$\left(\frac{a}{b}\right)_1 = 1,\quad \left(\frac{a}{b}\right)_2 = \frac{2}{11}.$$

Visszahelyettesítve a és b kifejezését a

$$2\cos^4 x - \cos^2 x + 3 = 0$$

$$4\cos^4 x - 11\cos^2 x + 6 = 0$$

egyenletekre jutunk, ami a továbbiakban azonos az 1. megoldásban leírtakkal.

2. Feladat

Legyen

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right],$$

ahol n pozitív egész szám.

Bizonyítsa be, hogy a sorozat minden tagja egész szám!

I. Megoldás:

Alkalmazzuk a binomiális tételt az $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ kiszámítására.
Eszerint:

(1) $$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \binom{n}{0}\sqrt{2}^0 + \binom{n}{1}\cdot\sqrt{2} + \binom{n}{2}\cdot\sqrt{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot\sqrt{2}^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot\sqrt{2}^n.$$ 1 pont

(1) jobb oldalán minden tag $\binom{n}{k}\cdot\sqrt{2}^k$ alakú, ahol k természetes szám, és $0 \le k \le n$.

Ha k páros természetes szám, azaz $k = 2m$, akkor $\left(\sqrt{2}\right)^{2m} = 2^m$, vagyis $\sqrt{2}^k$ értéke pozitív egész szám, ha m nem negatív egész szám.
Ha pedig k páratlan természetes szám, azaz $k = 2t+1$, akkor, $\sqrt{2}^k = 2^t \cdot \sqrt{2}$, ahol t természetes szám.

Ismeretes, hogy $\binom{n}{k}$ pozitív egész, ha $n \in N,\ k \in N,\ 0 \le k \le n,\ n \ne 0$. 1 pont

Előbbi megállapításainkból az következik, hogy (1)-ben kétféle tag fordul elő.
Az egyik típusú tag pozitív egész $\left[\binom{n}{2m}\cdot 2^m\right]$, 1 pont

a másik típusú egy pozitív egész szám és $\sqrt{2}$ szorzata: $\left[\binom{n}{2t+1}\cdot 2^t\cdot\sqrt{2}\right]$.

Ezek összege lesz (1) jobboldala, azaz:

(2) $$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\cdot\sqrt{2},$$

ahol az $a; b$ számok pozitív egészek, mivel pozitív egészek összegeként adódnak.

1 pont

Alkalmazzuk a binomiális tételt $\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ kiszámításához!
Ezzel:

(3) $\left(1-\sqrt{2}\right)^n=\binom{n}{0}\sqrt{2}^0-\binom{n}{1}\cdot\sqrt{2}+\binom{n}{2}\cdot\sqrt{2}^2-...+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}\cdot\sqrt{2}^n.$

Látható, hogy az (1) és (3) összefüggések jobb oldalain ugyanazok a tagok szerepelnek, de (3)-ban az $\binom{n}{k}\cdot\sqrt{2}^k$ alakú tagok előjele negatív, ha k páratlan természetes szám.

Ebből az következik, hogy

(4) $$\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a-b\cdot\sqrt{2}.$$

(2) és (4) felhasználásával: 2 pont

(5) $$a_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(a+b\sqrt{2}\right)-\left(a-b\sqrt{2}\right)\right].$$

1 pont

Elvégezve a műveleteket, azt kapjuk (5)-ből, hogy

(6) $$a_n=b.$$

2 pont

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $a_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$ egész szám.

Összesen: 1 pont

Megjegyzés: 10 pont

Ne vonjuk le az első 3 pontot attól, aki az $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ polinom alakjának meghatározásához konkrét számítások útján jut el!

II. Megoldás:

Számítsuk ki a sorozat néhány elemét!

(1) $a_1=1;\quad a_2=2;\quad a_3=5;\quad a_4=12;\quad a_5=29.$

(1)-ből azt sejtjük, hogy a sorozatot az

(2) $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geq 3),$

$a_1=1,$

$a_2=2$

rekurzív formulával is képezhetjük.

Először ezt a sejtést fogjuk bizonyítani. 2 pont

Képezzük a $2a_{n-1}+a_{n-2}$ összeget!

Mivel:

$$a_{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right],$$

és

$$a_{n-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}\right],$$

ezért

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=2\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}\right].$$

Átalakítva: 1 pont

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[2\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-2\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[2\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}-2\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}\left(2+2\sqrt{2}+1\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\right]$$

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-2}\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}\right]$$ 2 pont

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}\right]$$

$$2a_{n-1}+a_{n-2}=a_n$$

Sejtésünk tehát igaz, vagyis a sorozatra teljesül az 2 pont

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$$

képzési szabály.
Mivel az első két tag pozitív egész, a (2) képzési szabály szerint ezután minden tagot az előző két tagból egész számmal való szorzással és összeadással képezünk, ezért a sorozat minden tagja valóban egész szám. 1 pont

2 pont

Összesen: 10 pont

III. Megoldás:

Ezt a bizonyítást teljes indukcióval végezzük el.

$a_1 = 1$, tehát az $n = 1$ értékre az állítás igaz, a_1 egész szám.

Indukciós feltevésünk az, hogy

1 pont

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$$

egész szám, ha n pozitív egész.

A teljes indukciós bizonyítás azt jelenti, hogy ez az állítás n-ből következik $n+1$-re is.

A sorozat képzési szabálya szerint írjuk fel a_{n+1}-et:

$$(1) \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right].$$

Bizonyítandó, hogy a_{n+1} egész szám.

(1)-et átalakítva:

$$(2) \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(1-\sqrt{2}\right).$$

Tovább alakítva:

1 pont

$$(3) \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right] + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right].$$

(3) szerint

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right],$$

és ebben a_n az indukciós feltevés miatt egész,ezért a továbbiakban azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$$

egész szám.

1 pont

Az I. megoldásban leírtak (4)-ig terjedő része szerint

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\cdot\sqrt{2} \text{ és } \left(1-\sqrt{2}\right)^n = a - b\cdot\sqrt{2},$$

ahol az $a; b$ számok pozitív egészek.

Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(a + b\cdot\sqrt{2} + a - b\cdot\sqrt{2}\right),$$

azaz

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\cdot 2a = a,$$

tehát 5* pont

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$$

valóban egész szám.

Eszerint (3)-ból azt kaptuk, hogy

$a_{n+1} = a_n + a$.

Mivel azonban az indukciós feltevés szerint $a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$ egész szám, ezért

$a_{n+1} = a_n + a$

is egész szám.

A feladat állítása $n=1$ értékre teljesül, és bizonyításunk szerint n-ből következik $n+1$-re, ezért az állítás minden pozitív egész n számra igaz. 1 pont

1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

- III. megoldásban az 5* pontot (teljes egészében) csak akkor kapja meg a versenyző, ha korrekt módon bizonyítja, hogy $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\cdot\sqrt{2}$ és $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a - b\cdot\sqrt{2}$.

3. Feladat

Az ABC háromszögben

$$BAC\angle = 90°,\ BC = a,\ CA = b,\ AB = c$$

és a háromszög K-val jelölt kerületére fennáll, hogy

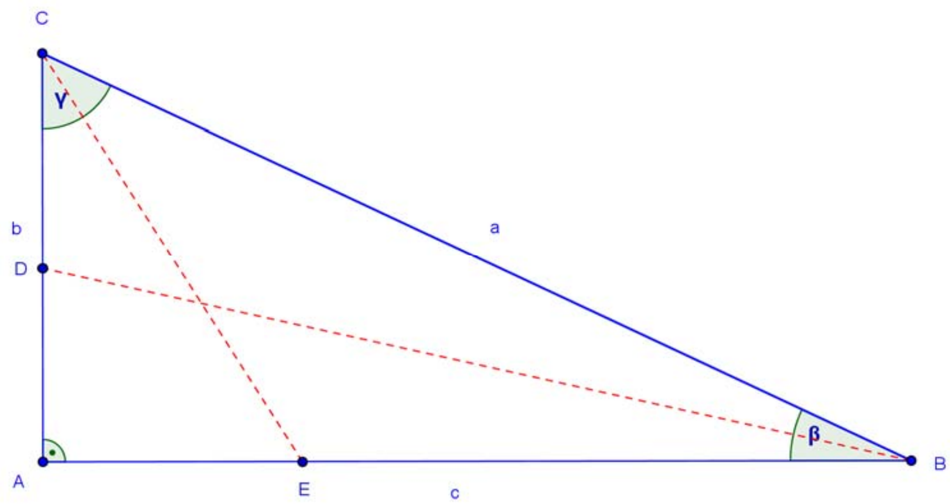
$$K = \frac{a+b}{c}.$$

a) Számítsa ki $tg\frac{\beta}{2}$ értékét a K függvényében! (ahol $\beta = CBA\angle$)

b) K milyen értékeire lesz a β szög az ABC háromszög legkisebb szöge?

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók, az ABC háromszögben a BD és CE szakaszok a megfelelő belső szögek $(\beta\ és\ \gamma)$ felezői.



a)

Az ABD derékszögű háromszögben

(1) $$tg\frac{\beta}{2} = \frac{AD}{c},$$ 1 pont

A belső szögfelező tétele miatt

$$\frac{AD}{b - AD} = \frac{c}{a},$$

amiből

$$AD = \frac{b \cdot c}{a + c}.$$

Ezt beírva (1)-be

(2) $$tg\frac{\beta}{2}=\frac{b}{a+c}.$$ 1 pont

Továbbá

$$K=a+b+c,$$

és a feltétel szerint

$$K=\frac{a+b}{c}$$

ezért

$$\frac{a+b}{c}=a+b+c$$

amiből

(3) $$a+b=c\cdot(a+b)+c^2$$

adódik.

Az ABC háromszögre érvényes Pitagorasz-tételből azt kapjuk, hogy

$$c^2=a^2-b^2,$$

és szorzattá alakítás után

$$c^2=(a+b)\cdot(a-b).$$

Ezt beírjuk a (3) összefüggésbe és a nyilvánvalóan pozitív $a+b$ tényezővel való osztás után a

$$1=c+(a-b),$$

átalakítva:

(4) $$a+c=b+1$$ 1 pont

egyenlőségre jutunk.

A $K=a+b+c$ és (4) összevetéséből

(5) $$K=2b+1.$$

Innen látszik, hogy

$$K>1.$$

(ezt egyébként $K=\frac{a+b}{c}$-ből is látjuk, hiszen a háromszög egyenlőtlenség miatt $a+b>c$). 1 pont

(4)-et beírva (2)-be

(6) $$tg\frac{\beta}{2}=\frac{b}{b+1}.$$

Ugyanakkor (5)-ből

$$b=\frac{K-1}{2},$$

ezt a (6) összefüggésbe írva:

(7) $$tg\frac{\beta}{2}=\frac{K-1}{K+1},\ (K>1)$$

ezzel meghatároztuk $tg\frac{\beta}{2}$ értékét K függvényében.

1 pont

b)

A háromszög legnagyobb szöge derékszög, ezért a β szög akkor lehet a háromszög legkisebb szöge, ha

$$\beta<\gamma,$$

azaz

$$\frac{\beta}{2}<\frac{\gamma}{2}.$$

Vagyis $tg\frac{\beta}{2}<tg\frac{\gamma}{2}$, hiszen a tangensfüggvény szigorúan monoton növekvő a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban.

1 pont

Ezért kiszámítjuk $tg\frac{\gamma}{2}$–et.

Az ACE derékszögű háromszögben

$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{AE}{b},$$

és AE-t a szögfelező tételből kiszámítva:

$$AE=\frac{bc}{a+b}.$$

Így

$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{c}{a+b},$$

illetve ezt a

$$K=\frac{a+b}{c}$$

feltétellel összevetve

(8) $$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{K}$$

adódik. (és ez értelmezett, hiszen $K\neq 0$)

1 pont

Beírva (7)-et és (8)-at a

$$tg\frac{\beta}{2}<tg\frac{\gamma}{2}$$ összefüggésbe

(9) $$\frac{K-1}{K+1} \leq \frac{1}{K}.$$

A (9) egyenlőtlenségből ekvivalens átalakításokkal (hiszen $K > 1$) a

(10) $$K^2 - 2K - 1 < 0$$ 1 pont

másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk.

A $K^2 - 2K - 1 = 0$ egyenlet gyökei

$$K_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ és } K_2 = 1 - \sqrt{2},$$

így a (10) egyenlőtlenség megoldásai a

$$1 - \sqrt{2} < K < 1 + \sqrt{2}$$

egyenlőtlenségeknek megfelelő valós számok. 1 pont

De tudjuk, hogy az ABC háromszög kerülete $K > 1$. Ezért a β szög akkor lehet a háromszög legkisebb szöge, ha

(11) $$1 < K < 1 + \sqrt{2}.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
Ne vonjunk le pontot, ha a versenyző $\beta \leq \gamma$ -val számol, azaz $\beta = \gamma = 45^0$-ot is megoldásnak veszi.