**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011/2012**
**Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)**

**1. (iskolai) forduló**

1. Oldja meg a valós számok halmazán az
$$(x-3)^4+(x-5)^4=82$$
egyenletet!

2. Egy számsorozatot a következő módon képezünk: legyen
$$a_1=1 \text{ és } a_2=2,$$
a sorozat további tagjai pedig tegyenek eleget az
$$a_n=a_{n-1}\cdot a_{n+1}-1 \quad (n\geq 2)$$
összefüggésnek.
Mennyi a sorozat első 2011 tagjának az összege?

3. Legyenek $m$ és $n$ pozitív egész számok. Igazolja, hogy
$$\frac{m}{n}<\frac{m^2+m\cdot n+2n^2}{m^2+m\cdot n+n^2}$$
akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{m}{n}<\sqrt[3]{2}$!

4. Egy $R$ sugarú körbe olyan trapézt írunk, amelynek oldalai $R$; $R$; $R$; $2R$ hosszúságú húrok.
Az $R$ hosszúságú alaphoz tartozó rövidebb ív $F$ felezőpontjából párhuzamosokat húzunk a trapéz száraival, ezek a kört másodszor a $G$ illetve a $H$ pontokban metszik.
Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe egyenlő az $FGH$ háromszög területével!

5. Legyenek az $a,b,c,d$ számok egymástól és 0-tól különböző számjegyek.
Adja meg a lehető legkevesebb számú osztóval rendelkező, tízes számrendszerbeli, $N=\overline{abcd}+\overline{dabc}+\overline{cdab}+\overline{bcda}$ alakú számok közül a legnagyobbat!

6. Tegyünk egy hagyományos óra minden számjegyére egy-egy korongot, tehát az 1-re egy darabot, a 2-re is egy darabot, és így tovább, végül a 12-re is egy darabot. Ezután egy lépés a következőt jelenti: megfogunk két tetszőleges korongot, és az egyiket az óramutató járásával ellentétes irányban, a másikat pedig az óramutató járásával azonos irányban a szomszédjára áttesszük. Elérhetjük-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mind a 12 korong ugyanazon a számjegyen legyen?

Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont adható.