A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$3\cdot 25^x - 16^x = 2\cdot 20^x$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet a hatványozás azonosságainak felhasználásával

(1) $$3\cdot 5^{2x} - 4^{2x} = 2\cdot 5^x \cdot 4^x$$

alakba is írható. 1 pont

Az 5^x és 4^x pozitív valós számok, ezért (1) mindkét oldalát oszthatjuk az $5^x \cdot 4^x$ pozitív számmal. 1 pont

Ekkor a műveletek elvégzése, a hatványozás azonosságainak újbóli alkalmazása és az egyszerűsítés után a

(2) $$3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

Vezessük be az

$$y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$$

jelölést, ezzel a jelöléssel a (2) egyenletből

$$3\cdot y - \frac{1}{y} = 2$$

adódik, ebből pedig a műveletek elvégzésével és rendezéssel:

(3) $$3y^2-2y-1=0.$$ 2 pont

A (3) másodfokú egyenlet megoldásai az

$$y_1=1 \text{ és } y_2=-\frac{1}{3}$$

valós számok. 1 pont

Az $y_2=-\frac{1}{3}$ nem megoldás, mert $y=\left(\frac{5}{4}\right)^x$ pozitív szám. 1 pont

Ha $y_1=1$, akkor

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x=1,$$

azaz

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^0.$$ 1 pont

Mivel az $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^x$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ebből

$$x=0$$

következik.

Az eredeti egyenlet egyetlen megoldása tehát az $x=0$ valós szám. 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldás $(3\cdot 1-1=2\cdot 1)$. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Melyek azok az $n \in N$ számok, amelyekre

$$2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$$

prímszám?

Megoldás:

A hatványozás azonosságainak alkalmazásával a $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$ kifejezést átalakítjuk:

(1) $$2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1 = 2^2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n} + 1 = 4 \cdot 6^{2n} + 1.$$ 2 pont

Ha $n = 0$, akkor az (1)-ben szereplő $4 \cdot 6^{2n} + 1$ kifejezés értéke 5, ez pedig prímszám.

Ezért $n = 0$ a feladat megoldása. 2 pont

Ezután meghatározzuk az $n \in N^+$ feltétel mellett a $4 \cdot 6^{2n} + 1$ kifejezés utolsó számjegyét. 1 pont

A 6 minden pozitív egész kitevőjű hatványa 6-ra végződik. 1 pont

Ebből következik, hogy a $4 \cdot 6^{2n}$ szám 4-re végződik, és így a $4 \cdot 6^{2n} + 1$ kifejezés

utolsó számjegye 5, eszerint pedig $4 \cdot 6^{2n} + 1$ osztható 5-tel. 2 pont

Az $n \in N^+$ feltétel mellett tehát $4 \cdot 6^{2n} + 1 > 5$, másrészt osztható 5-tel, vagyis nem lehet prímszám. 1 pont

Ezért $4 \cdot 6^{2n} + 1$ akkor és csak akkor lesz prímszám, ha $n = 0$, és ekkor $4 \cdot 6^{2n} + 1 = 5$. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám.
Igazolja, hogy a háromszög az egyik csúcsán átmenő két egyenessel három egyenlő területű részre vágható úgy, hogy a kapott részek területének mérőszáma is egész szám!

1. Megoldás:

A derékszögű háromszög befogói az a és b, a háromszög területe

$$T = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Igazolnunk kell, hogy a terület harmadrésze, vagyis

$$\frac{T}{3} = \frac{a \cdot b}{6}$$

egész szám, ha a, b, c egész. Vagyis azt kell bizonyítani, hogy $a \cdot b$ osztható 6-tal. 2 pont

A feltétel szerint az $a; b; c$ számok egy háromszög oldalai, tehát pozitív egész számok.

A pozitív egész számok 3-mal való osztási maradékai a $-1; 0; 1$ számok lehetnek.

Mivel a Pitagorasz-tétel érvényes a, b, c-re, ezért

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Figyelembe véve, hogy $a; b; c$ pozitív számok, valamint, hogy a és b szerepe felcserélhető, az $i; j; k \in N$ jelöléssel, ha

$a = 3i, b = 3j \pm 1$, akkor $a^2 + b^2 = 9i^2 + 9j^2 \pm 6j + 1 = 3m + 1$;

$a = 3i, b = 3j$, akkor $a^2 + b^2 = 9i^2 + 9j^2 = 3m$;

$a = 3i \pm 1, b = 3j \pm 1$, akkor $a^2 + b^2 = 9i^2 \pm 6i + 1 + 9j^2 \pm 6j + 1 = 3m + 2 \quad (m \in N^+)$;

valamint, ha

$$c = 3k \text{, akkor } c^2 = 9k^2 = 3n;$$

illetve, ha

$$c = 3k \pm 1 \text{, akkor } c^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3n + 1 \quad (n \in N^+).$$

Eszerint az $a^2 + b^2 = c^2$ pitagoraszi összefüggés nem állhat fenn, ha

$$a = 3i \pm 1 \text{ és } b = 3j \pm 1.$$

Ezért az $a; b$ egész számok közül legalább az egyik osztható 3-mal, tehát $a \cdot b$ is osztható 3-mal. 3 pont

Másrészt a pozitív egész számok 2-vel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak, ezért a $p; q; r \in N$ jelöléssel, ha

$a = 2p, b = 2q \pm 1$, akkor $a^2 + b^2 = 4p^2 + 4q^2 \pm 4q + 1 = 4s + 1$;

$a = 2p, b = 2q$, akkor $a^2 + b^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4s$;

$a = 2p \pm 1, b = 2q \pm 1$, akkor

$a^2 + b^2 = 4p^2 \pm 4p + 1 + 4q^2 \pm 4q + 1 = 4s + 2 \quad \left(s \in N^+\right)$,

valamint, ha

$$c = 2r, \text{ akkor } c^2 = 4r^2 = 4t;$$

illetve, ha

$$c = 2r + 1, \text{ akkor } c^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4t + 1 \quad \left(t \in N^+\right).$$

Eszerint a c^2 egész szám 4-gyel osztva nem adhat 2 maradékot, tehát nem lehet a és b mindegyike páratlan szám. Ezért az $a; b$ egész számok közül legalább az egyik osztható 2-vel, tehát $a \cdot b$ is osztható 2-vel. 3 pont

Ha $a \cdot b$ osztható 3-mal és 2-vel, akkor 6-tal is osztható, és ezzel beláttuk, hogy $\frac{T}{3} = \frac{a \cdot b}{6}$ egész szám, vagyis a háromszög valóban három egyenlő területű részre osztható úgy, hogy a részek területe is egész szám. 1 pont

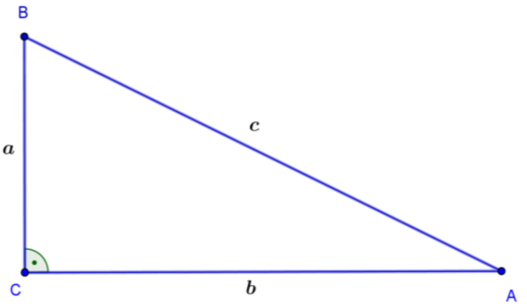
A három egyenlő területű részre osztás meg is valósítható:

ha egy csúcsot összekötünk a szemközti oldal harmadolópontjaival, akkor olyan egyenlő területű részeket kapunk, amelyeknek számértéke egész.

Például, ha $a = 3, b = 4, c = 5$, akkor $m_c = \frac{12}{5}$, $t = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} = 2 = \frac{T}{3}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra

Az a,b befogójú, ABC derékszögű háromszög T területére $T=\frac{a\cdot b}{2}$, ahol $a,b\in N^{+}$, és ezzel

$$\frac{T}{3}=\frac{a\cdot b}{6}.$$ 2 pont

Azt kell bizonyítanunk, hogy $6|a\cdot b$.

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2|a\cdot b$ és $3|a\cdot b$ egyszerre igaz, vagyis

$$6|a\cdot b \ldots \Leftrightarrow \ldots 2|a\cdot b \text{ és } 3|a\cdot b.$$

Tudjuk, hogy $2|a\cdot b \ldots \Leftrightarrow \ldots 2|a$ vagy $2|b$, és

$$3|a\cdot b \ldots \Leftrightarrow \ldots 3|a \text{ vagy } 3|b.$$

Tegyük fel először, hogy:

$$a=2k+1,\ b=2l+1 \qquad (k;l\in N).$$

A Pitagorasz-tétel érvényes a,b,c-re, ezért

$$(2k+1)^2+(2l+1)^2=c^2;$$

azaz

$$4(k^2+l^2)+4(k+l)+2=c^2;$$

és így

$$4m+2=c^2 \qquad (m\in N^{+}),$$

ami lehetetlen, mert a négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.

Ebből következik, hogy $2|a$ vagy $2|b$ teljesül, és ezért $2 \mid a \cdot b$ is igaz. 3 pont

Tegyük fel másodszor, hogy:

$$a = 3n \pm 1 \text{ és } b = 3p \pm 1 \qquad (n; p \in N).$$

A Pitagorasz-tétel érvényes a, b, c -re, ezért

$$(3n \pm 1)^2 + (3p \pm 1)^2 = c^2;$$

illetve

$$9 \cdot (n^2 + p^2) + 6 \cdot (n \pm p) + 2 = c^2;$$

és így

$$c^2 = 3q + 2 \qquad (q \in N^+).$$

Ez ismét lehetetlen, mert a négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.

Ebből az következik, hogy $3|a$ vagy $3|b$, és így $3 \mid a \cdot b$. 3 pont

Mivel $(2;3) = 1$, ezért $2 \mid a \cdot b$ és $3 \mid a \cdot b$ miatt $6 \mid a \cdot b$, ezért $\frac{T}{3} = \frac{a \cdot b}{6}$ egész szám. 1 pont

A három egyenlő területű részre osztás meg is valósítható:

ha egy csúcsot összekötünk a szemközti oldal harmadolópontjaival, akkor olyan egyenlő területű részeket kapunk, amelyeknek számértéke egész.

Például, ha $a = 3, b = 4, c = 5$, akkor $m_c = \frac{12}{5}$, $t = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} = 2 = \frac{T}{3}$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

4. Az ABC háromszögben

$$BC = a; CA = b; AB = c \text{ hosszúságú,}$$

és az oldalak hosszaira teljesül, hogy

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

Bizonyítsa be, hogy

$$60° < BCA\angle < 90° !$$

<u>Megoldás:</u>

Legyen a szokásos jelöléssel $BCA\angle = \gamma$.

A feltételi egyenlőség bal oldalát szorzattá alakítjuk:

(1) $$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 + b^2 - ab).$$ 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a + b > c$, ezért a feltétel és (1) figyelembe vételével

$$c^3 > c\cdot(a^2 + b^2 - ab),$$

ahonnan $c > 0$-val való egyszerűsítés után:

(2) $$c^2 > a^2 + b^2 - ab.$$ 1 pont

A koszinusztétel szerint $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$, így (2)-ből

$$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma > a^2 + b^2 - ab$$

következik, ahonnan rendezés és az $ab > 0$ számmal való osztás után adódik, hogy:

(3) $$\cos\gamma < \frac{1}{2}.$$ 1 pont

Tudjuk, hogy, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, továbbá az $f(x) = \cos x$ függvény a $]0;\pi[$ intervallumban szigorúan monoton csökken, ezért (3) miatt $\gamma > 60°$. 2 pont

b) Másodszor belátjuk, hogy $\gamma < 90°$, vagyis azt, hogy γ hegyesszög.

Indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy $\gamma \geq 90°$, azaz tegyük fel, hogy a háromszög derékszögű, vagy tompaszögű. 1 pont

Ekkor az oldalhosszak négyzeteire teljesül, hogy

(4) $$a^2 + b^2 \leq c^2.$$

Szorozzuk meg a (4) egyenlőtlenség mindkét oldalát $c > 0$-val, ebből adódik, hogy

$$a^2c + b^2c \leq c^3,$$

ahonnan a feladat feltétele szerint:

(5) $$a^2c + b^2c \leq a^3 + b^3.$$ 1 pont

Az (5) egyenlőtlenség átrendezhető a következőképpen:

(6) $$a^2 \cdot (c-a) + b^2 \cdot (c-b) \le 0 .$$ 1 pont

Mivel minden háromszögben a legnagyobb szöggel szemben van a leghosszabb oldal, és az indirekt feltétel szerint γ a háromszög legnagyobb szöge, ezért $c > a$ és $c > b$.

Eszerint a (6) egyenlőtlenség bal oldala pozitív, ezért (6) nem állhat fenn. 1 pont

Indirekt feltételünk tehát nem teljesülhet, azaz valóban

$$\gamma < 90° .$$

Eredményeinket egyesítve $60° < \gamma < 90°$, és ezzel a feladat állítását bizonyítottuk. 1 pont

Összesen: 10 pont

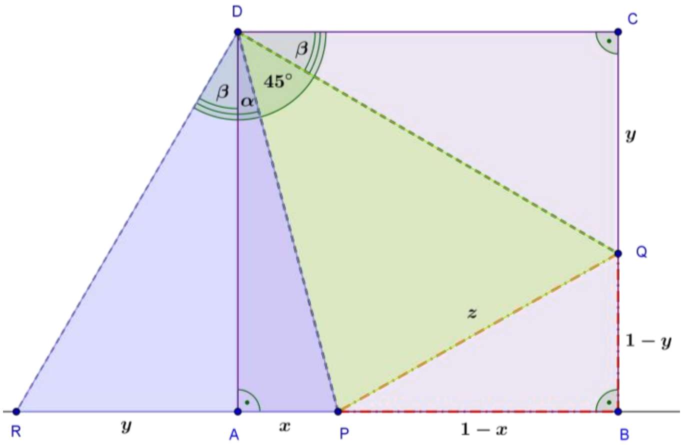
Megjegyzés: a (4) összefüggés bizonyítható például a koszinusztétellel is.

5. Egy egységnyi oldalú négyzet csúcsai $A; B; C; D$. Az AB oldal tetszőleges pontja P. A Q pont a BC oldalon van, és $PDQ\angle = 45°$.

Mekkora a PBQ háromszög kerülete?

1. Megoldás:

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk (2. ábra), amelyen az $AP = x$, illetve $CQ = y$, $PQ = z$, továbbá az $ADP\angle = \alpha$ és $CDQ\angle = \beta$ jelöléseket választottuk.



2. ábra 1 pont

A választott jelölésekkel egyrészt $BP = 1 - x$ és $BQ = 1 - y$, valamint $\alpha + \beta = 45°$, továbbá a PBQ háromszög K-val jelölt kerületére $K = 1 - x + 1 - y + z = 2 - x - y + z$. 1 pont

Mérjük fel az AB egyenesre az $AR = y$ szakaszt úgy, hogy a B és R pontokat az A pont elválassza.

Ekkor az ADR és CDQ háromszögekben két-két megfelelő oldal hossza megegyezik, hiszen $AR = CQ = y$ és $AD = CD = 1$, illetve a kiválasztott két-két oldal által bezárt szög mindkét háromszögben derékszög.

Az ADR és CDQ háromszögek tehát egybevágók, és így $ADR\angle = \beta$, valamint $DR = DQ$. 2 pont

Ebből az is következik, hogy a PDR és PDQ háromszögek is egybevágók, mert a PD szakasz közös, és az előbbiek alapján $DR = DQ$, továbbá mindkét háromszögben a kiválasztott oldalak által bezárt szög $\alpha + \beta = 45°$. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy a PDR és PDQ háromszögekben a $PR = x + y$ és a $PQ = z$ szakaszok hossza is egyenlő, azaz $x + y = z$. 2 pont

Ezért a PBQ háromszög K kerülete $K = 2 - x - y + z = 2 - x - y + x + y = 2$, vagyis a PBQ háromszög kerülete 2 hosszúságegység. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u>

Ha a négyzet oldalhossza a, akkor a fentiekhez hasonlóan bizonyítható, hogy $K = 2a$.

<u>2. Megoldás:</u>

A megoldás során az 1. megoldás ábráját és jelöléseit használjuk. 1 pont

Ezekkel a jelölésekkel az ADP háromszögben

$$tg\alpha = \frac{x}{1} = x,$$

a CDQ háromszögben pedig

$$tg\beta = \frac{y}{1} = y.$$ 1 pont

Tudjuk, hogy $\alpha+\beta=45°$, ezért a $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$ trigonometrikus összegzési tételből kapjuk, hogy

$$tg45°=\frac{x+y}{1-xy},$$

mivel azonban

$$tg45°=1,$$

ezért

$$\frac{x+y}{1-xy}=1,$$

amiből

(1) $$x+y=1-xy$$

következik. 2 pont

A PBQ háromszögre felírt Pitagorasz-tételből azt kapjuk, hogy $z^2=(1-x)^2+(1-y)^2$, ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel:

(2) $$z^2=x^2+y^2+2-2x-2y.$$

A (2) összefüggésből az következik, hogy

(3) $$z^2=x^2+y^2+2-2\cdot(x+y).$$

(3)-ba (1)-et behelyettesítve

$$z^2=x^2+y^2+2-2\cdot(1-xy),$$

innen pedig a műveletek elvégzésével és rendezéssel

(4) $$z^2=x^2+y^2+2xy.$$ 2 pont

(4) éppen azt jelenti, hogy

$$z^2=(x+y)^2,$$

és mivel $x; y; z$ pozitív számok, ezért

(5) $$z=x+y.$$ 2 pont

A PBQ háromszög kerülete tehát

$$K=1-x+1-y+z,$$

amelyből (5) felhasználásával kapjuk, hogy

$$K=1-x+1-y+x+y=2.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

6. Egy 5x5-ös táblázat minden sorába és minden oszlopába pontosan egyszer beírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat. A táblázatba beírt számok a táblázat egyik átlójára szimmetrikusan helyezkednek el.

   A feltételeknek megfelelő kitöltés esetén mennyi lehet a táblázat szimmetriaátlójában levő számok összege?

<u>Megoldás:</u>

A táblázat egy lehetséges kitöltése a következő:

A D

1	3	2	5	4
2	1	4	3	5
3	5	1	4	2
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1

B C

2* pont

A továbbiakban bizonyítani fogjuk, hogy a táblázat feltételeknek megfelelő kitöltése esetén a szimmetriaátlóban (itt BD-ben) az 1; 2; 3; 4 és 5 számok mindegyike előfordul és nyilvánvalóan mindegyik egyszer.

Ha a táblázatot a feltételeknek megfelelően kitöltöttük, akkor minden sorban és minden oszlopban egy darab 1-es, egy darab 2-es, egy darab 3-as, egy darab 4-es és végül egy darab 5-ös van. Ez azt is jelenti, hogy a táblázatban összesen rendre öt darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös van, azaz mindegyikből páratlan számú. 1 pont

Jelöljük ki a táblázat valamelyik, nem a szimmetriaátlóban levő helyét, nem sérti az általánosságot, ha az itt levő számot 1-esnek választjuk. Ilyen a feltételek miatt biztosan van. 1 pont

A szimmetria miatt a kiválasztott helynek a szimmetriaátlóra vonatkozó tükörképe a táblázat olyan helye, ahol szintén 1-es áll. 1 pont

Eszerint minden, a szimmetriaátlóban nem szereplő 1-esnek van a táblázatban egy megfelelő párja, vagyis az ilyen elhelyezkedésű 1-esek párba állíthatók, azaz páros sokan vannak. 2 pont

Mivel azonban a táblázatban összesen páratlan számú 1-es van, ezért legalább az egyik 1-esnek nincs párja, tehát a szimmetriaátlóban kell lennie. Így a szimmetriaátlóban 1; 3, vagy 5 darab 1-es lehet. Hasonlóan bizonyítható, hogy a szimmetriaátlóban ugyanez igaz a 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös számokra is. Mivel a szimmetriaátlóban csak öt hely van, ezért minden számból pontosan csak egy szerepelhet itt. 2 pont

A táblázat, feltételeknek megfelelő bármely kitöltése esetén tehát a szimmetriaátlóban szereplő számok összege $1+2+3+4+5=15$. 1* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1) ha a versenyző megad egy helyes kitöltést, például:

A D

1	5	3	4	2
3	2	5	1	4
2	1	4	5	3
4	3	1	2	5
5	4	2	3	1

B C

de nem bizonyítja, hogy a szimmetriaátlóban mind az öt szám pontosan egyszer előfordul, akkor legfeljebb a *-gal jelzett pontokat kaphatja meg.

2) minden $(2n+1)x(2n+1)$-es $(n \in N^+)$ táblázatra igaz, hogy a feltételeknek megfelelő kitöltés esetén a szimmetriaátlóban az összes $1; 2; 3;...;2n+1$ szám pontosan egyszer előfordul, ezért a szimmetriaátlóban levő számok összege $1+2+3+...+2n+1=2n^2+3n+1$.