A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. A 2015 olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek és közülük pontosan kettő prímszám. Hány ilyen négyjegyű természetes szám van?

Megoldás:

A 10-es számrendszerben a tíz darab számjegy között négy prímszám van, ezek a $2; 3; 5; 7$. — 1 pont

Ezekből két különböző számjegy $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választható ki. — 1 pont

Ha a két nem prím számjegy közül az egyik a 0, akkor a másik nem prím számjegy 5-féle lehet. — 1 pont

Mivel 0 nem állhat az ezresek helyén, ezért a négy különböző számjegynek $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$-féle sorrendje lehetséges. — 1 pont

Ebből az következik, hogy a feltételeknek megfelelő olyan négyjegyű szám, amelynek jegyei között egy darab 0 számjegy van, pontosan $6 \cdot 5 \cdot 18 = 540$ állítható elő. — 1 pont

Ha a két különböző, nem prím számjegy egyike sem 0, akkor a nem prím számjegyek közül két különbözőt $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk ki. — 1 pont

A négy különböző számjegynek $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendjét állíthatjuk elő. — 1 pont

Ebből azt kapjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő olyan négyjegyű szám, amelynek jegyei között a 0 számjegy nem szerepel, pontosan $6 \cdot 10 \cdot 24 = 1440$ darab van. — 1 pont

Tehát az olyan 10-es számrendszerbeli, különböző számjegyekből álló négyjegyű számból, amelynek pontosan két jegye prímszám, $540 + 1440 = 1980$ darab van. — 2 pont

Összesen: 10 pont

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az $x+y^2=\frac{1}{2}$, $x^2+2y=-\frac{7}{4}$ egyenletrendszert!

1. Megoldás:

A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

(1) $$x^2+x+y^2+2y=-\frac{5}{4}.$$ 2 pont

Ebből ekvivalens átalakítással

(2) $$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+2y+1=0$$
következik. 2 pont

Látható, hogy (2) bal oldala két teljes négyzet összege, mégpedig

(3) $$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=0.$$ 2 pont

A (3) összefüggés bal oldalán szereplő zárójeles kifejezések nem negatívak, összegük akkor és csak akkor zérus, ha mindkét kifejezés értéke zérus. 1 pont

Ebből $x+\frac{1}{2}=0$ és $y+1=0$ következik. 1 pont

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az $x=-\frac{1}{2}$; $y=-1$ valós számpár. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kapott számpár az eredeti egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégíti. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az első egyenletből kifejezhetjük az x-et, ezzel

(1) $$x=\frac{1}{2}-y^2.$$ 1 pont

Az (1) mindkét oldalát négyzetre emelve $x^2=\frac{1}{4}-y^2+y^4$. 1 pont

Ezt a második egyenletbe helyettesítve és rendezve:

(2) $$y^4-y^2+2y+2=0.$$ 1 pont

A (2) bal oldala szorzattá alakítható

(3) $$(y+1)\cdot(y^3-y^2+2)=0.$$ 1 pont

Mivel $y^3-y^2+2=y^3+y^2-2y^2+2=y^2\cdot(y+1)-2\cdot(y^2-1)$, ezért a (3) bal oldalán szereplő második zárójeles kifejezés is szorzattá alakítható.
Eszerint:

(4) $$(y+1)^2\cdot(y^2-2y+2)=0.$$

A (4) egyenlet bal oldalán $y^2-2y+2=(y-1)^2+1$, ezért $y^2-2y+2=0$ nem lehetséges. 2 pont

Ebből az következik, hogy (4) csak úgy teljesülhet, ha $(y+1)^2=0$. 1 pont

Az $(y+1)^2=0$ eredményünkből $y=-1$ adódik, ez pedig (1) alapján azt jelenti, hogy $x=-\frac{1}{2}$. 1 pont

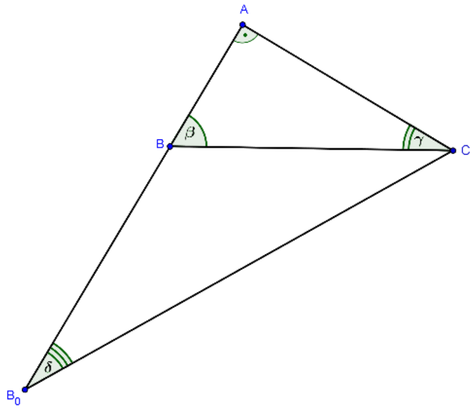
Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az $x=-\frac{1}{2}$; $y=-1$ valós számpár. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért az $x=-\frac{1}{2}$; $y=-1$ számpár az eredeti egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégíti. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. A BC átfogójú ABC derékszögű háromszög AB befogójának A pontból induló félegyenesén megjelöljük azt a B_0 pontot, amelyre $AB_0 = 3 \cdot AB$. Azt tapasztaljuk, hogy az ABC és AB_0C háromszögek hasonlók.
Bizonyítsa be, hogy az AB_0C háromszögben CB belső szögfelező!

Megoldás: jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra

Legyen $AC = b$ és $AB = c$. Ekkor a feltételeknek megfelelően $AB_0 = 3c$.

Mivel az ABC és AB_0C derékszögű háromszögek hasonlók, hegyesszögeik páronként egyenlők. Ezért az 1. ábra jelöléseinek megfelelően $\beta = \delta$ vagy $\gamma = \delta$. 1 pont

A $\beta = \delta$ összefüggés azonban nem állhat fenn, mert az $ABC\angle = \beta$ szög a BB_0C háromszög külső szöge, ezért $\beta = \delta + BCB_0\angle$, vagyis $\beta > \delta$. 1 pont

Ebből az következik, hogy csak $\gamma = \delta$, valamint $\beta = ACB_0\angle$ állhat fenn. 1 pont

Az ABC és AB_0C derékszögű háromszögek hasonlósága azt is jelenti, hogy a megfelelő oldalak hosszának aránya a két háromszögben egyenlő, azaz $\frac{AC}{AB} = \frac{AB_0}{AC}$, innen jelöléseinkkel 1 pont

(1) $$\frac{b}{c} = \frac{3c}{b}.$$

Az (1) összefüggésből azt kapjuk, hogy $b^2 = 3c^2$, ahonnan 2 pont

(2) $$b = c \cdot \sqrt{3}.$$

Így (2) alapján az ABC háromszögben $tg\beta = \frac{b}{c} = \sqrt{3}$, innen pedig a β hegyesszögre $\beta = 60°$ adódik, és ezzel $\gamma = \delta = 30°$. 2 pont

Eszerint $ACB\angle = \gamma = 30°$ és $ACB_0\angle = \beta = 60°$, ez éppen azt jelenti, hogy az AB_0C háromszögben CB belső szögfelező, és éppen ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. Legyenek a $\frac{p}{p-2}\cdot x^2+\frac{p-1}{p+1}\cdot x+\frac{1}{4}=0$ egyenlet valós gyökei x_1 és x_2.

Határozza meg a $p\neq 0$ valós paraméter mindazon értékeit, amelyekre fennáll, hogy

$$x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)=\frac{1}{p+1}!$$

Megoldás:

Mivel $p\neq 0$, ezért $\frac{p}{p-2}\neq 0$, így a feladatbeli egyenlet másodfokú, továbbá a bal oldalon szereplő törtek nevezői miatt teljesül, hogy $p\neq 2$ és $p\neq -1$.

Az egyenletnek vannak valós gyökei, tehát az egyenlet diszkriminánsa nem negatív valós szám:

(1) $$\left(\frac{p-1}{p+1}\right)^2-4\cdot\frac{p}{p-2}\cdot\frac{1}{4}\geq 0.$$ 1 pont

Az (1) bal oldalán egyszerűsítés, a törtek közös nevezőre hozása és a műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

(2) $$\frac{-6p^2+4p-2}{(p+1)^2\cdot(p-2)}\geq 0.$$ 1 pont

Mivel $(p+1)^2>0$, ezért a (2) egyenlőtlenség kétféle módon állhat fenn:

(3) $$-6p^2+4p-2\geq 0 \text{ és } p-2>0,$$

vagy

(4) $$-6p^2+4p-2\leq 0 \text{ és } p-2<0.$$ 1 pont

A $-6p^2+4p-2=0$ egyenletnek nincs valós megoldása, mert az egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát az $f(p)=-6p^2+4p-2=0$ másodfokú függvénynek nincsen zérushelye.
Az $f(p)=-6p^2+4p-2=0$ függvény képe lefelé nyíló parabola, ezért $-6p^2+4p-2\geq 0$ nem lehetséges, vagyis a (3) egyenlőtlenségek nem teljesülhetnek egyetlen p valós számra sem.

Ebből az is következik, hogy $-6p^2+4p-2\leq 0$ minden p valós számra igaz, tehát (4) alapján a (2) egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

(5) $$p<2.$$ 1 pont

A másodfokú egyenlet Viéte-formulái alapján

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p-2}{4p} \text{ és } x_1 + x_2 = -\frac{(p-1)\cdot(p-2)}{p\cdot(p+1)}.$$ 1 pont

Mivel a feladat feltétele szerint $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}$,

ezért,

$$\frac{p-2}{4p} + \frac{(p-1)\cdot(p-2)}{p\cdot(p+1)} = \frac{1}{p+1},$$

ahonnan egyszerűsítés, a műveletek elvégzése és rendezés után azt kapjuk, hogy

(6) $$5p^2 - 17p + 6 = 0.$$ 1 pont

A (6) másodfokú egyenlet megoldásai $p_1 = \frac{2}{5}$ és $p_2 = 3$. 1 pont

A $p_2 = 3$ megoldás nem felel meg az (5) feltételnek, ezért csak $p_1 = \frac{2}{5}$ lehetséges. 1 pont

A $p_1 = \frac{2}{5}$ értéket a $\frac{p}{p-2} \cdot x^2 + \frac{p-1}{p+1} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$ egyenletbe helyettesítve a műveletek elvégzése után a $7x^2 + 12x - 7 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei

$$x_1 = \frac{-6+\sqrt{85}}{7} \text{ és } x_2 = \frac{-6-\sqrt{85}}{7}.$$ 1 pont

Számolással ellenőrizhető, hogy ezekre $p_1 = \frac{2}{5}$ mellett valóban teljesül, hogy

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}.$$ 1 pont

Összesen: 10 pont

5. Az a_n sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 1$, és minden $n \geq 2$ esetén $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$.

Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyik nagyobb $\dfrac{1}{100}$-nál?

Megoldás:

Ha $a_{n-1} > 0$, akkor az $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$ képzési szabály alapján $a_n > 0$ is teljesül minden $n \geq 2$ esetén. Mivel $a_1 = 1$, ezért $a_2 > 0$, ebből $a_3 > 0$, és ehhez hasonlóan minden $n \geq 2$ pozitív egész számra igaz, hogy $a_n > 0$, vagyis a sorozat minden tagja pozitív szám. 1 pont

Vehetjük tehát az $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$ képzési szabály két oldalának a reciprokát:

(1) $$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + 2.$$ 2 pont

(1) alapján felírhatunk egy $n-1$ darab egyenletből álló egyenletrendszert:

(2) $$\begin{aligned} &\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = 2; \\ &\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} = 2; \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 2. \end{aligned}$$ 2 pont

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

(3) $$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = (n-1) \cdot 2.$$ 1 pont

Mivel a feltétel szerint $a_1 = 1$, ezért (3) alapján $\dfrac{1}{a_n} - 1 = 2n - 2$, és ezzel

(4) $$a_n = \frac{1}{2n-1},$$

ahol $2n-1 > 0$ pozitív egész szám. 1 pont

A feladat kérdésére akkor adjuk meg a választ, ha megoldjuk az $a_n > \frac{1}{100}$ egyenlőtlenséget. 1* pont

A (4) eredmény alapján $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{100}$, ebből rendezés után $n < \frac{101}{2}$ következik. 1* pont

Eszerint a sorozatnak pontosan 50 olyan tagja van, amelyek nagyobbak $\frac{1}{100}$-nál. 1* pont

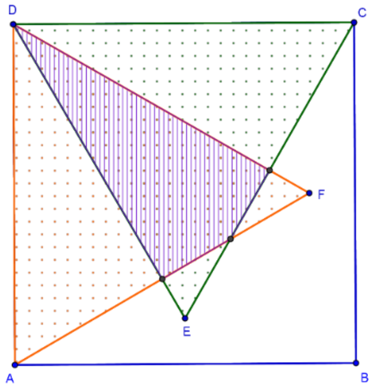
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: az $a_n = \frac{1}{2n-1}$ alapján $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$, és így $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$,
ahonnan a műveletek elvégzésével azt kapjuk, hogy $a_{n+1} - a_n = \frac{-2}{(2n+1)\cdot(2n-1)}$.
Ez azt jelenti, hogy minden pozitív egész n számra $a_{n+1} - a_n < 0$, vagyis $a_{n+1} < a_n$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.
Számolással ellenőrizhető, hogy $a_{50} = \frac{1}{99}$ és $a_{51} = \frac{1}{101}$.
A sorozat szigorúan monoton csökkenő tulajdonságából tehát az következik, hogy a sorozatnak valóban 50 olyan tagja van, amelyek nagyobbak $\frac{1}{100}$-nál.

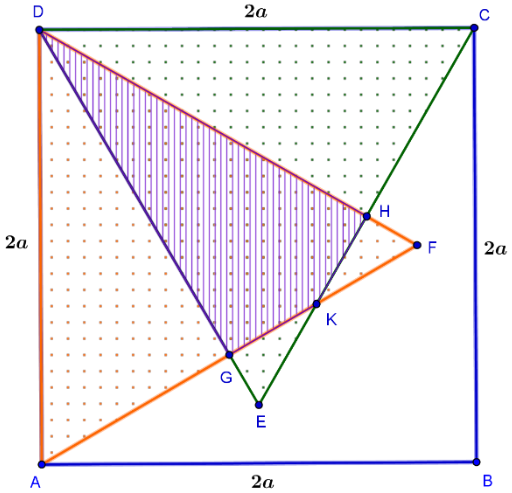
Ha a versenyző a feladat megoldását a sorozat szigorúan monoton csökkenő tulajdonságának bizonyítására építve a fenti módon fejezi be, a *-gal jelzett pontokat megkapja.

6. A négyzet alakú $ABCD$ asztallapra két egybevágó szabályos háromszöget terítünk le az ábra szerint (a szabályos háromszögek oldalainak hossza egyenlő a négyzet oldalainak hosszával).

Határozza meg a kétszer lefedett rész területének és a nem fedett rész területének arányát!



Megoldás: jelöléseink a 2. ábrán láthatók.



2. ábra

Az ADF és CDF szabályos háromszögek minden szöge $60°$-os, oldalaik hosszát, és ezzel az $ABCD$ négyzet oldalainak hosszát is $2a$-val jelöltük.
Az ADG háromszögben $GAD\angle = 60°$ és $GDA\angle = 30°$, hiszen
$GDA\angle = CDA\angle - CDE\angle = 90° - 60°$.
Eszerint az ADG háromszög harmadik szöge derékszög, azaz $AGD\angle = 90°$.
A CDH háromszögben hasonlóképpen láthatjuk be, hogy $HCD\angle = 60°$, $HDC\angle = 30°$ és $CHD\angle = 90°$. Az is látható, hogy az ADG és CDH háromszögek egybevágó, $2a$ átfogójú derékszögű háromszögek, ezért T_1-gyel jelölt területük egyenlő. 1 pont

Ismert, hogy azokban a $2a$ átfogójú derékszögű háromszögekben, amelyekben a hegyesszögek nagysága $30°$ és $60°$, a $30°$-os és $60°$-os szögekkel szemben levő befogók hossza rendre a és $a\cdot\sqrt{3}$. Ebből az következik, hogy:

(1) $$AG = CH = a \text{ és } GD = HD = a\cdot\sqrt{3}.$$ 1 pont

Abból, hogy $AGD\angle = 90°$ és $CHD\angle = 90°$, az is adódik, hogy $EGK\angle = 90°$ és $FHK\angle = 90°$.
Mivel $DEC\angle = 60°$ és $AFD\angle = 60°$, ezért $GEK\angle = 60°$, illetve $HFK\angle = 60°$, ezzel pedig $GKE\angle = 30°$ és $HKF\angle = 30°$.

Ugyanakkor $GE = DE - GD$ és $HF = DF - HD$, ezért az EKG és FKH $30°$-os és $60°$-os hegyesszögekkel rendelkező derékszögű háromszögekben

(2) $$GE = HF = 2a - a\cdot\sqrt{3} \text{ és } GK = HK = \left(2a - a\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}.$$ 1 pont

Az EKG és FKH háromszögekben a megfelelő szögek egyenlők, és (2) szerint két-két megfelelő oldaluk is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó, tehát a T_2-vel jelölt területük egyenlő.
Jelölje továbbá a kétszer fedett területet T_3, ez a $DGKH$ négyszög területe, illetve jelölje a szabályos háromszögek által nem fedett területet T_0.

Feladatunk a $\dfrac{T_3}{T_0}$ arány meghatározása. 1 pont

A 2. ábrán az ADF és CDF szabályos háromszögekben a GD illetve HD súlyvonalak felezik a megfelelő háromszögek területét, ezért

(3) $$T_1 = T_2 + T_3,$$

valamint

(4) $$T_0 = T_{ABCD} - 2T_1 - 2T_2 - T_3.$$ 2 pont

Mivel $AG = a$ és $GD = a\cdot\sqrt{3}$, ezért $T_1 = \dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$, továbbá mivel $GE = 2a - a\cdot\sqrt{3}$ és $GK = \left(2a - a\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}$, ezért $T_2 = \dfrac{a^2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{2}$

Ebből (3) alapján a műveletek elvégzésével és egyszerűsítéssel kapjuk, hogy

(5) $$T_3 = a^2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(2\cdot\sqrt{3} - 3\right).$$ 1 pont

Felhasználjuk, hogy $T_{ABCD} = 4a^2$, ezzel (4) szerint

$$T_0 = 4a^2 - a^2 \cdot \sqrt{3} - a^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} - a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right),$$

ahonnan a műveletek elvégzése után:

(6) $$T_0 = 5a^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right).$$ 1 pont

Az (5) és (6) összefüggések szerint

(7) $$\frac{T_3}{T_0} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)}{5a^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}.$$ 1 pont

A (7) jobb oldalán szereplő tört számlálóját és nevezőjét $\sqrt{3}$-mal szorozva a tört értéke nem változik, ezzel $\frac{T_3}{T_0} = \frac{3a^2 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)}{5a^2 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)}$, az egyszerűsítéseket elvégezve pedig azt kapjuk, hogy $\frac{T_3}{T_0} = \frac{3}{5}$.

Eszerint a feladatban szereplő kétszer lefedett és a nem fedett területek aránya

$$\frac{T_3}{T_0} = \frac{3}{5}.$$ <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont