



A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

**MATEMATIKA I. KATEGÓRIA
(SZAKKÖZÉPISKOLA)**

FELADATOK

1. Egy adott földterület felásását három munkás végzi. Éppen elkészülnek a munkával, ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik. Akkor is éppen elkészülnének a munkával, ha az első munkás 7 napot, a második 9 napot és a harmadik 2 napot dolgozna. Hány napot kellene a munka elvégzéséhez a harmadik munkásnak dolgoznia, ha az első csak 2 napot, a második pedig csak 4 napot dolgozna?
2. Húzzon egy vízszintes egyenest, majd egy erre merőleges függőleges egyenest, ezután az utóbbira merőleges vízszintes egyenest, és így tovább. Minden újabb egyenes legyen merőleges a közvetlen előtte húzott egyenesre és különbözzön az összes előző egyenestől! Bizonyítsa be, hogy az eljárást bármikor abbahagyva a keletkező metszéspontok száma vagy két egymást követő természetes szám szorzatával vagy egy négyzetszámmal egyenlő!
3. Bizonyítsa be, hogy minden x valós szám esetén $2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| \geq 2$!
Mikor áll fenn egyenlőség?
4. Határozza meg a $2^{1 \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}} \cdot 3^{2 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}} \cdot 4^{3 \cdot \log_{\sqrt{4}} \sqrt{2}} \cdot \dots \cdot 2015^{2014 \cdot \log_{\sqrt{2015}} \sqrt{2}}$ szorzat utolsó számjegyét!
5. Az ABC háromszögben a szokásos jelölések mellett $\alpha = 60^\circ$ és $\beta = 40^\circ$.
Legyen a P pont a BC oldal egy belső pontja.
Bizonyítsa be, hogy az ABP háromszög körülírt körének középpontját az AP egyenesre tükrözve a PCA háromszög körülírt körének egy pontját kapjuk!

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.