



Oktatási Hivatal

A 2015/2016. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

döntő forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Adott három egymástól és nullától különböző számjegy, melyekből elkészítjük az összes lehetséges tízes számrendszerbeli háromjegyű számot.
Azt tapasztaljuk, hogy a kapott háromjegyű számok közül a két legnagyobb szám összege 1444.
Határozza meg a három számjegyet!

1. Megoldás: jelölje a három számjegyet $a; b; c$.

Mivel a számjegyek különbözők, föltehetjük, hogy $a > b > c > 0$.

1 pont

Ekkor a két legnagyobb háromjegyű szám az \overline{abc} és az \overline{acb} , továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\overline{abc} > \overline{acb}.$$

1 pont

A feltétel szerint $\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$, ezért $\overline{abc} > \overline{acb}$ alapján azt kapjuk, hogy

$$(1) \quad 2 \cdot \overline{abc} > 1444 \quad \text{és} \quad 2 \cdot \overline{acb} < 1444.$$

2 pont

Az (1) összefüggésekből adódik, hogy

$$(2) \quad \overline{abc} > 722 \quad \text{és} \quad \overline{acb} < 722.$$

A (2) eredmények szerint csak $a = 7$ lehetséges.

2 pont

Ekkor viszont $\overline{acb} < 722$ miatt $c \leq 2$.

A $c = 2$ esetben a feltételek figyelembe vételével csak $b = 1$ lenne lehetséges, de ez ellentmond a $b > c$ egyenlőtlenségnek. Mivel a számjegyek mindegyike pozitív, ezért csak $c = 1$ állhat fenn.

1 pont

Az $a = 7$ és $c = 1$ eredmények és az $\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$ feltétel miatt

$$(3) \quad (700 + 10b + 1) + (700 + 10 + b) = 1444 .$$

A (3) egyenletből egyszerű számolással adódik, hogy $b = 3$.

1 pont

Ezért a keresett három számjegy: $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$.

1 pont

Az $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$ számjegyekből összesen hat háromjegyű, különböző jegyekből álló számot készíthetünk, ezek közül a két legnagyobb az $\overline{abc} = 731$ és az $\overline{acb} = 713$, ezek összege valóban 1444 .

1 pont

Összesen:

10 pont

2. Megoldás: jelölje a három számjegyet $a;b;c$.

A számjegyek különbözők, ezért föltehetjük, hogy $a > b > c > 0$.

1 pont

Ekkor a két legnagyobb háromjegyű szám az \overline{abc} és az \overline{acb} , amelyek összege a feltétel szerint:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444 ,$$

azaz

$$(1) \quad 200a + 11 \cdot (b + c) = 1444 .$$

2 pont

Az (1) egyenletből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy $11 \cdot (b + c) - 44 = 200 \cdot (7 - a)$,

illetve

$$(2) \quad 11 \cdot (b + c - 4) = 200 \cdot (7 - a) .$$

2 pont

A (2) egyenlet bal oldala osztható 11-gyel, így a vele egyenlő jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie 11-gyel.

Mivel azonban a 11 és 200 számok relatív prímek, ezért csak a jobb oldalon szereplő $7 - a$ kifejezés lehet 11-gyel osztható.

1 pont

Figyelembe véve, hogy a tízes számrendszerbeli számjegy, a $7 - a$ kifejezés csak akkor lehet 11-gyel osztható, ha $a = 7$, ekkor $7 - a = 0$.

1 pont

Ez azt is jelenti, hogy a (2) egyenlet mindkét oldalának értéke zérus.
Ebből pedig az következik, hogy

$$b + c - 4 = 0,$$

vagyis

(3) $b + c = 4.$ 1 pont

A feltételek szerint b és c különböző pozitív számjegyek, továbbá kezdeti feltevésünk szerint $b > c$, így (3)-ból azt kapjuk, hogy csak

$$b = 3; c = 1$$

lehetséges.

Ezért a keresett három számjegy: $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$. 1 pont

Az $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$ számjegyekből összesen hat háromjegyű, különböző jegyekből álló számot készíthetünk, ezek közül a két legnagyobb az $\overline{abc} = 731$ és az $\overline{acb} = 713$, ezek összege valóban 1444.

1 pont

Összesen: 10 pont

3. Megoldás: jelölje a három számjegyet $a;b;c$.

A számjegyek különbözők, ezért föltehetjük, hogy $a > b > c > 0$. 1 pont

Ekkor a két legnagyobb háromjegyű szám az \overline{abc} és az \overline{acb} , amelyek összege a feltétel szerint:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444,$$

a helyiértékek figyelembe vételével

(1) $200a + 11 \cdot (b + c) = 1444.$ 1 pont

Mivel $a;b;c$ különböző számjegyek, amelyek közül a a legnagyobb, továbbá $200 \cdot 8 > 1444$, ezért

(2) $a \leq 7.$ 2 pont

Ebből az $a > b > c > 0$ feltétel miatt

$$(3) \quad b + c \leq 5 + 6,$$

azaz $11 \cdot (b + c) \leq 121$, ebből pedig (1) miatt $200a \geq 1444 - 121$, vagyis $a \geq \frac{1323}{200}$

következik.

1 pont

Számolással ellenőrizhetjük, hogy $6 < \frac{1323}{200} < 7$, és mivel az a szám az $0 < a \leq 9$ feltételeknek

megfelelő pozitív egész, továbbá $a \geq \frac{1323}{200}$, ezért

$$(4) \quad a \geq 7.$$

1 pont

A (2) és (4) összefüggések együttesen azt jelentik, hogy csak

$$a = 7$$

lehetséges.

1 pont

A kapott értéket az (1) egyenletbe helyettesítve és az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$b + c = 4,$$

amelyből $b > c$ miatt csak

$$(5) \quad b = 3; c = 1$$

következik.

1 pont

A keresett három számjegy tehát: $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$.

1 pont

Az $a = 7$, $b = 3$ és $c = 1$ számjegyekből összesen hat háromjegyű, különböző jegyekből álló számot készíthetünk, ezek közül a két legnagyobb az $\overline{abc} = 731$ és az $\overline{acb} = 713$, ezek összege valóban 1444.

1 pont

Összesen: 10 pont

2. Legyenek $p; t; r$ pozitív prímszámok.

Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja $a_1 = -r$, differenciája $d = 7t$.

Határozza meg a $p; t; r$ prímszámokat, ha teljesül, hogy

$$a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r !$$

1. Megoldás: a számtani sorozat első három tagja a sorozat képzési szabálya szerint

$$a_1 = -r, a_2 = -r + d = -r + 7t \text{ és } a_3 = -r + 2d = -r + 14t. \quad 1 \text{ pont}$$

Ezeket beírhatjuk az $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ összefüggésbe:

$$(1) \quad -r \cdot p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t \cdot r + (-r + 14t) \cdot r \cdot p = 7t \cdot p \cdot t \cdot r.$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a pozitív r számmal, ekkor azt kapjuk, hogy

$$-p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t + (-r + 14t) \cdot p = 7t^2 \cdot p,$$

innen a zárójelek felbontásával adódik $13p \cdot t = 7t^2 \cdot p - 7t^2 + r \cdot p + r \cdot t$, ebből pedig egyszerű átalakításokkal:

$$(2) \quad 13p \cdot t = 7t^2 \cdot (p - 1) + r \cdot (p + t). \quad 1 \text{ pont}$$

A $p; t$ prímszámok nem lehetnek egyszerre páratlanok, mert akkor (2) bal oldala páratlan, míg jobb oldala páros szám lenne. 2 pont

Ezért három esetet kell megvizsgálnunk:

a) a $p; t$ prímszámok mindegyike páros, azaz $p = 2; t = 2$,

b) a p prím páros, vagyis $p = 2$, a t prímszám páratlan,

c) a t prím páros, vagyis $t = 2$, a p prímszám páratlan. 1 pont

Az a) esetben a $p = 2; t = 2$ értékeket (2)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $r = 6$, ez azonban nem prímszám, ezért a feladat feltételei mellett az a) eset nem fordulhat elő. 1 pont

A b) esetben a $p = 2$ számot a (2) egyenletbe írva $26t = 7t^2 + r \cdot (2 + t)$, ahonnan rendezéssel és szorzattá alakítással:

$$(3) \quad t \cdot (26 - 7t) = r \cdot (2 + t).$$

A (3) egyenlet jobb oldala pozitív, ezért a bal oldalnak is pozitívnek kell lennie, ez azonban 3-nál nagyobb t prímeke már nem teljesül.

Figyelembe véve, hogy a b) esetben a t prímszám páratlan, csak $t = 3$ lehetséges.

Ha $t = 3$, akkor (3)-ból egyszerű számolással kapjuk, hogy $r = 3$.

1 pont

A c) esetben a $t = 2$ számot a (2) egyenletbe helyettesítve $26p = 28 \cdot (p - 1) + r \cdot (p + 2)$, ahonnan rendezéssel kapjuk, hogy:

$$(4) \quad 28 = 2p + r \cdot (p + 2).$$

A (4) egyenletben a bal oldal páros szám, ezért a jobb oldalnak is páros számnak kell lennie, ez azonban csak úgy lehet, ha az $r \cdot (p + 2)$ tényező páratlan.

Mivel a c) esetben a p prímszám páratlan, ezért $p + 2$ is páratlan, tehát az r prímszámnak szükségképpen párosnak kell lennie, azaz $r = 2$.

Az $r = 2$ számot a (4) egyenletbe írva egyszerű számolással adódik, hogy $p = 6$.

Ez nyilván nem megoldása a feladatnak, hiszen $p = 6$ nem prímszám.

1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, azt kaptuk, hogy a feltételeknek csak a

$$p = 2; t = 3; r = 3$$

prímszámok felelnek meg.

1 pont

Számolással ellenőrizve ezekre a prímszámokra a feladatbeli számtani sorozat különbsége

$d = 21$, első három tagja $a_1 = -3; a_2 = 18; a_3 = 39$, és ezeket a számokat a

$a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe írva mindkét oldal értéke 378.

1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: a számtani sorozat első három tagja a sorozat képzési szabálya szerint

$$a_1 = -r, a_2 = -r + d = -r + 7t \text{ és } a_3 = -r + 2d = -r + 14t.$$

Ezeket beírva a feltételként szolgáló $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe,

$$-r \cdot p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t \cdot r + (-r + 14t) \cdot r \cdot p = 7t \cdot p \cdot t \cdot r,$$

innen a pozitív r számmal az egyenlet mindkét oldalát osztva és a kapott egyenletet rendezve

$$(1) \quad 13p \cdot t = 7t^2 \cdot (p - 1) + r \cdot (p + t). \quad 2 \text{ pont}$$

A $p; t; r$ prímszámok paritása szerint 8 esetet kell megvizsgálnunk.

Ezek az esetek a következők:

- a) mindhárom prímszám páratlan,
- b) mindhárom prímszám páros, azaz $p = 2; t = 2; r = 2$,
- c) p páros prím, azaz $p = 2$, $t; r$ páratlan prímelek,
- d) t páros prím, azaz $t = 2$, $p; r$ páratlan prímelek,
- e) r páros prím, azaz $r = 2$, $t; p$ páratlan prímelek
- f) $p; t$ páros prímelek, azaz $p = 2; t = 2$, r páratlan prím,
- g) $p; r$ páros prímelek, azaz $p = 2; r = 2$, t páratlan prím,
- h) $t; r$ páros prímelek, azaz $t = 2; r = 2$, p páratlan prím. 2 pont

Az a) és az e) eset nem valósulhat meg, mert ha a $p; t$ prímszámok mindegyike páratlan, akkor (1) bal oldala páratlan szám, míg a jobb oldal két zárójeles kifejezése páros szám, ezért a jobb oldal is páros lenne.

A b) eset sem állhat fenn, mert a $p = 2; t = 2; r = 2$ számok behelyettesítése esetén a bal oldal értéke 52, míg a jobb oldal értéke 36. 1 pont

A c) esetben $p = 2$ behelyettesítése után (1)-ből azt kapjuk, hogy $26t = 7t^2 + r \cdot (2 + t)$, illetve rendezés és kiemelés után

$$(2) \quad t \cdot (26 - 7t) = r \cdot (2 + t).$$

A (2) egyenlet jobb oldala pozitív, ezért a bal oldalnak is pozitívnek kell lennie, ez azonban 3-nál nagyobb t prímszámokra már nem teljesül.

Mivel a c) esetben a t prímszám páratlan, csak $t = 3$ lehet. Ebből (2) alapján azt kapjuk, hogy $r = 3$.

1 pont

A d) esetben, amikor $t = 2$, és $p; r$ páratlan prímszámok, az egyenlet két oldalának paritása eltérő, mégpedig a bal oldal páros, a jobb oldal páratlan. Ezért a d) eset nem állhat fenn.

Az f) esetben, amikor $p = 2; t = 2$, és r páratlan prím, akkor ezeknek az értékeknek az (1) egyenletbe való beírásával arra az eredményre jutunk, hogy

$$r = 6,$$

ez azonban nem prímszám, ezért a feladat feltételei mellett az f) eset sem lehetséges.

1 pont

A g) esetben, amikor $p; r$ páros prímszámok, vagyis $p = 2; r = 2$, és t páratlan prím, behelyettesítés után azt kapjuk, hogy a bal oldal értéke páros, míg a jobb oldal páratlan pozitív egész szám, ezért ez az eset sem valósulhat meg.

Végül a h) esetben, amikor $t = 2; r = 2$, és p páratlan prím, a $t = 2; r = 2$ értékeket (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$p = 6,$$

de ez nem prímszám, így a h) eset sem állhat fenn.

1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk és azt az eredményt kaptuk, hogy a feladat minden feltételét csak a c) esetben kapott

$$p = 2; t = 3; r = 3$$

prímszámok elégítik ki.

1 pont

Számolással ellenőrizve ezekre a prímszámokra a feladatbeli számtani sorozat különbsége

$d = 21$, első három tagja $a_1 = -3; a_2 = 18; a_3 = 39$, ezeket a számokat a

$a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe írva mindkét oldal értéke 378.

1 pont

Összesen: 10 pont

3. Megoldás: a számtani sorozat első három tagja a sorozat képzési szabálya szerint

$$a_1 = -r, a_2 = -r + d = -r + 7t \text{ és } a_3 = -r + 2d = -r + 14t.$$

Ezeket beírva a feltételként szolgáló $a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe,

$$-r \cdot p \cdot t + (-r + 7t) \cdot t \cdot r + (-r + 14t) \cdot r \cdot p = 7t \cdot p \cdot t \cdot r,$$

innen a pozitív r számmal az egyenlet mindkét oldalát osztva és a kapott egyenletet rendezve

$$(1) \quad 7t^2 - 7p \cdot t^2 - t \cdot r + 13p \cdot t = p \cdot r.$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a pozitív t számmal:

$$(2) \quad 7t - 7p \cdot t - r + 13p = \frac{p \cdot r}{t}. \quad 2 \text{ pont}$$

A (2) egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldalnak is egész számnak kell lennie. Ez csak úgy lehetséges, ha a t pozitív prím osztója a p és r pozitív prímekek szorzatának, de ez csak akkor állhat fenn, ha

$$t = p \text{ vagy } t = r,$$

a továbbiakban ezt a két esetet vizsgáljuk. 2 pont

Ha $t = p$, akkor a (2) egyenletből behelyettesítés, rendezés és szorzattá alakítás után azt kapjuk, hogy $t \cdot (-7t + 20) = 2r$, a kapott egyenlet mindkét oldalát a pozitív t számmal osztva pedig

$$(3) \quad -7t + 20 = \frac{2r}{t}. \quad 1 \text{ pont}$$

A (3) egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldal csakis úgy lehet egész szám, ha a t pozitív prím osztója a 2 és r prímszámok szorzatának, vagyis, ha

$$t = 2 \text{ vagy } t = r. \quad 1 \text{ pont}$$

A $t = 2$ értéket (3)-ba helyettesítve $r = 6$ adódik, ez nem felel meg a feladat feltételeinek, hiszen $r = 6$ nem prímszám.

A $t = r$ behelyettesítésével pedig azt kapjuk, hogy $t = \frac{18}{7}$, ez nem felel meg a feltételeknek, tehát nem megoldása a feladatnak. 1 pont

Végül, ha $t = r$, akkor a (2) egyenletbe helyettesítve, rendezve, szorzattá alakítás után azt kapjuk, hogy $p \cdot (7t - 12) = 6t$, a kapott egyenlet mindkét oldalát a pozitív p számmal osztva

$$(4) \quad 7t - 12 = \frac{6t}{p}.$$

A (4) egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldal csakis úgy lehet egész szám, ha a p pozitív prím osztója a $6t = 2 \cdot 3 \cdot t$ szorzatnak, és mivel p pozitív prím, ezért csak

$$p = 2; p = 3; \text{ vagy } p = t$$

lehetséges.

1 pont

Ezek közül a $p = t$ feltételt nem szükséges újra elemeznünk, mert az előbbieken láttuk, hogy ebből nem kapunk a feltételeknek megfelelő $p; t; r$ számhármast.

Ha $p = 2$, akkor a (4) egyenletből azt kapjuk, hogy $t = 3$, így a $t = r$ figyelembe vételével kapott $p = 2; t = 3; r = 3$ számhármast kielégíti a feladat feltételeit.

Ha $p = 3$, akkor (4) szerint $t = \frac{12}{5}$, ez nyilván nem megoldása a feladatnak.

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, azt az eredményt kaptuk, hogy a feladat minden feltételét csak a

$$p = 2; t = 3; r = 3$$

prímszámok elégítik ki.

1 pont

Számolással ellenőrizve ezekre a prímszámokra a feladatbeli számtani sorozat különbsége $d = 21$, első három tagja $a_1 = -3; a_2 = 18; a_3 = 39$, ezeket a számokat a

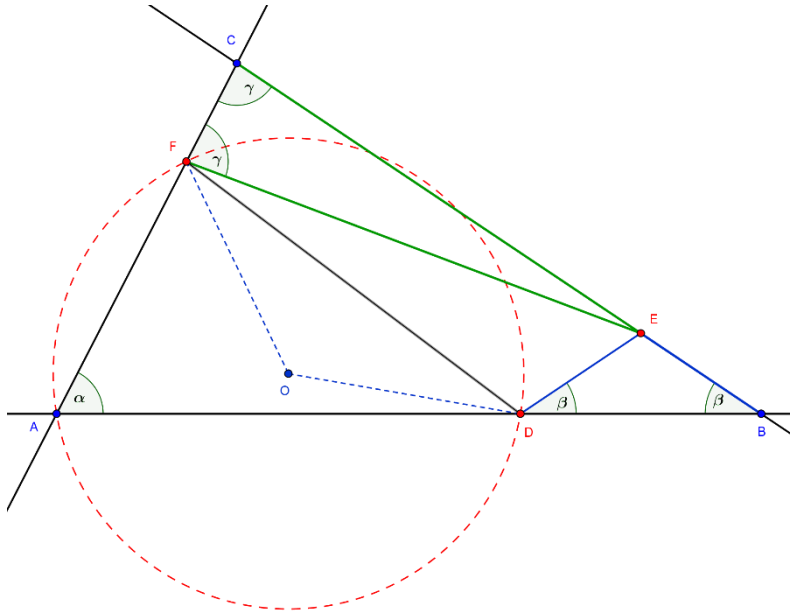
$a_1 \cdot p \cdot t + a_2 \cdot t \cdot r + a_3 \cdot r \cdot p = d \cdot p \cdot t \cdot r$ egyenletbe írva mindkét oldal értéke 378.

1 pont

Összesen: 10 pont

3. Az ABC hegyesszögű háromszög AB ; BC és CA oldalain úgy vettük fel a D ; E és F belső pontokat, hogy $DE = BE$ és $FE = CE$.
 Igazolja, hogy az ADF háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik a DEF szögfelezőjére!

Megoldás: készítsünk a feladat feltételeinek megfelelő ábrát (1. ábra).



1. ábra

1 pont

Legyenek az ABC háromszög A ; B ; C csúcsoknál levő belső szögei rendre α ; β ; γ .

Mivel a feltételek miatt $DE = BE$ és $FE = CE$, ezért az 1. ábra BDE és CFE háromszögei egyenlő szárú háromszögek, amelyekben a BD és CF alapokon fekvő szögek rendre β és γ . 2 pont

A BDE és CFE háromszögekben a szárak szögei

$$(1) \quad \angle BED = 180^\circ - 2\beta \text{ és } \angle CEF = 180^\circ - 2\gamma.$$

Nyilvánvaló, hogy $\angle BED + \angle CEF + \angle FED = 180^\circ$, ezért az (1) összefüggés alapján

$$180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma + \angle FED = 180^\circ,$$

amiből rendezés után azt kapjuk, hogy $\angle FED = 2\beta + 2\gamma - 180^\circ$

$$(2) \quad \angle FED = 2 \cdot (\beta + \gamma) - 180^\circ.$$

2 pont

A háromszög belső szögeinek összege 180° , ezért $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, és így (2)-ből

(3) $FED\angle = 180^\circ - 2\alpha$
következik.

1 pont

Az ADF háromszög köré írt körben a $DAF\angle = \alpha$ szög az A pontot nem tartalmazó DF ívhez tartozó kerületi szög.

A kerületi és középponti szögek összefüggése szerint ehhez az ívhez

$$DOF\angle = 2\alpha$$

nagyságú középponti szög tartozik.

1 pont

Eredményünk és a (3) összefüggés szerint a $DEFO$ négyszögben két szemben levő szög összege

$$FED\angle + DOF\angle = 180^\circ - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ,$$

ezért a $DEFO$ négyszög húrnégyszög.

1 pont

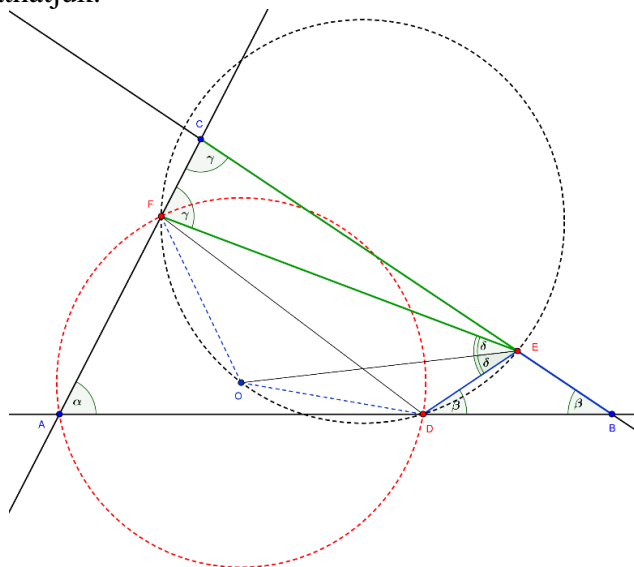
A $DEFO$ négyszögben a DO és FO azonos hosszúságú húrok, hiszen ezek a szakaszok az ADF háromszög körülírt körének sugarai.

A $DEFO$ húrnégyszögben azonos hosszúságú húrokhoz egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért

$$DEO\angle = FEO\angle = \delta,$$

ahogy azt a 2. ábrán láthatjuk.

1 pont



2. ábra

Ez pedig azt jelenti, hogy ADF háromszög körülírt körének O középpontja illeszkedik a $DEF\angle$ szögfelezőjére, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

1 pont

Összesen: 10 pont