Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny

első forduló

MATEMATIKA I. KATEGÓRIA

(SZAKGIMNÁZIUM, SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Egy húrtrapéz pontosan három oldalának hosszúsága egyenlő, a negyedik oldal hossza eltér a többitől. Tudjuk, hogy a kétféle oldalhossz összege $50\ cm$, a húrtrapéz területe $375\ cm^2$. Mekkorák a húrtrapéz oldalai?

Megoldás:

A húrtrapéz párhuzamos oldalai nem lehetnek egyenlők, mert akkor a négyszög paralelogramma lenne, és ebben az esetben nem lehetne pontosan három azonos hosszúságú oldala. 1 pont

Jelöljük a trapéz három, egyenlő hosszúságú oldalának hosszát b-vel, ekkor a negyedik, b-től különböző hosszúságú oldal hossza legyen a, a feltétel szerint ezek összege

$$a + b = 50\ cm.$$

A trapéz magasságát m-mel jelölve a trapéz területe

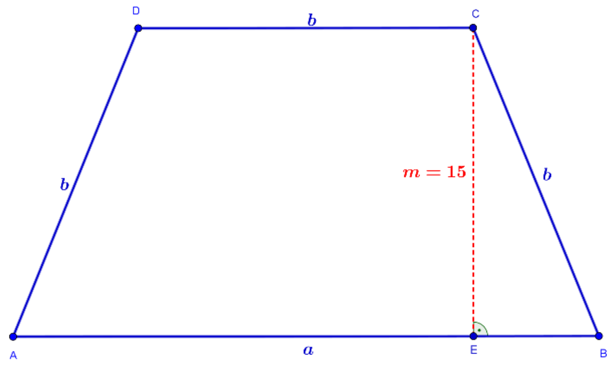
$$\frac{a+b}{2} \cdot m = 375\ cm^2.$$

Innen $a + b = 50$ beírásával azt kapjuk, hogy

$$m = 15\ cm.$$ 2 pont

Az a és b hosszúságok különbözők, ezért $a > b$, vagy $a < b$ lehetséges. 1 pont

Ha $a > b$, akkor a csak a trapéz hosszabbik párhuzamos oldala lehet (1. ábra).



1. ábra

Az 1. ábra BCE derékszögű háromszögében

$$BE = \frac{a-b}{2} = \frac{50-2b}{2} = 25-b. \qquad \text{1 pont}$$

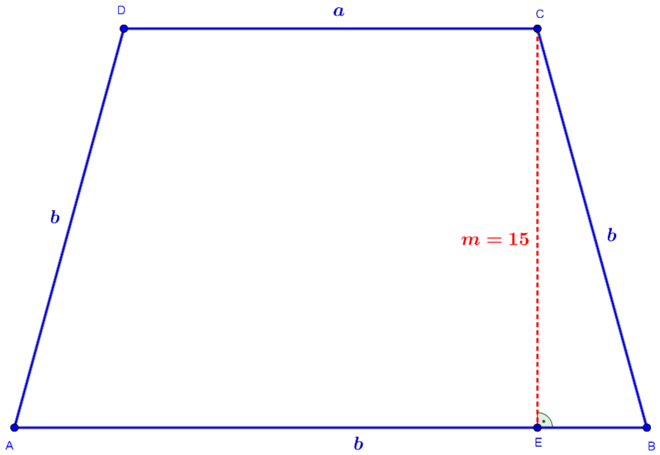
Felírjuk a Pitagorasz-tételt a BCE derékszögű háromszögre:

$$15^2 + (25-b)^2 = b^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $b = 17\ cm$, és ezért $a = 33\ cm$.

A húrtrapéz három oldala tehát $b = 17\ cm$, a negyedik oldala pedig $a = 33\ cm$ hosszúságú. 1 pont

Vizsgáljuk meg az $a < b$ esetet is (2. ábra). Ekkor az a hosszúságú szakasz csak a trapéz rövidebb párhuzamos oldala lehet.



2. ábra

A fenti gondolatmenet szerint

$$BE = \frac{b-a}{2} = \frac{2b-50}{2} = b-25. \qquad \text{1 pont}$$

A Pitagorasz-tételt a BCE derékszögű háromszögre alkalmazva:

$$15^2 + (b-25)^2 = b^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $b = 17\ cm$ és ezért $a = 33\ cm$. 1 pont

Ez azonban az $a < b$ feltétel miatt nem állhat fenn. 1 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk és azt kaptuk, hogy a feltételeknek egyetlen trapéz felel meg, ennek párhuzamos oldalai $AB = 33\ cm, CD = 17\ cm$, a trapéz szárai $BC = DA = 17\ cm$ hosszúságúak. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a $BE = \frac{|b-a|}{2}$ jelöléssel az $a < b$ és $a > b$ esetek egyszerre tárgyalhatók.

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán az

$$5x + 8 \cdot \sqrt{xy} + 5y = 113$$
$$\left(2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{y}\right) = 56$$

egyenletrendszert!

<u>Megoldás:</u>

A négyzetgyök értelmezése miatt $x \geq 0$ és $y \geq 0$. 1 pont

Az első egyenlet más alakba írásából következik, hogy

(1) $$5 \cdot (x + y) + 8 \cdot \sqrt{xy} = 113.$$

A második egyenletből a műveletek elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$2x + 2y + 5 \cdot \sqrt{xy} = 56,$$

ahonnan

(2) $$2 \cdot (x + y) + 5 \cdot \sqrt{xy} = 56.$$ 1 pont

Alkalmazzuk az $a = x + y$ és $b = \sqrt{xy}$ helyettesítéseket, ezekkel az (1) és (2) egyenletekből az

(3) $$5a + 8b = 113,$$
$$2a + 5b = 56$$

elsőfokú egyenletrendszerhez jutunk. 2 pont

A (3) egyenletrendszert a behelyettesítő, vagy az egyenlő együtthatók módszerével megoldva az

$$a = 13, b = 6$$

megoldást kapjuk. 2 pont

Eszerint $x + y = 13$ és $\sqrt{xy} = 6$, utóbbiból négyzetre emeléssel $xy = 36$ következik.

Mivel $y = 13 - x$, ezért $x \cdot (13 - x) = 36$, ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel adódik, hogy

(4) $$x^2 - 13x + 36 = 0.$$

A (4) egyenlet megoldásai $x_1 = 4$ és $x_2 = 9$.

Innen $y = 13 - x$-ből azonnal következik, hogy $y_1 = 9$ és $y_2 = 4$. 2 pont

Az egyenletrendszer megoldásai tehát az $x_1 = 4, y_1 = 9$ és $x_2 = 9, y_2 = 4$ számpárok. 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek a számpárok a kiinduló egyenletrendszer mindkét egyenletét kielégítik, ezért valóban megoldásai a feladatnak. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u> mivel $x \geq 0, y \geq 0$, ezért $x = \sqrt{x}^2$ és $y = \sqrt{y}^2$, ezért bevezethetjük a $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$ jelöléseket, innen az $5a^2 + 8ab + 5b^2 = 113$, $2a^2 + 5ab + 2b^2 = 56$ egyenletrendszert kapjuk, amelyet megoldva $a = 2, b = 3$ vagy $a = 3, b = 2$ adódik.

3. Egy labdarúgó csapat 11 játékosának magasságmérését végzi a csapat orvosa. Az első játékos magasságánál 1 cm-rel *kisebb* az első két játékos átlagmagassága, viszont az első két játékos átlagmagasságánál 1 cm-rel *nagyobb* az első három játékos átlagmagassága. Az első három játékos átlagmagasságánál 1 cm-rel *kisebb* az első négy játékos átlagmagassága, és így tovább. Mekkora a legmagasabb játékos magassága, ha a legalacsonyabb játékos éppen 174 cm-es?

1. Megoldás:
Legyen a mérési sorrendben első játékos testmagassága $x\ cm$.

Ekkor a feladat feltétele szerint az első két játékos magasságának átlaga $x-1\ cm$. 1 pont

Ez pontosan azt jelenti, hogy a sorrendben második játékos magassága $x-2\ cm$, hiszen

$$\frac{x+(x-2)}{2}=x-1.$$ 1 pont

A feltételből következik, hogy az első három játékos átlagmagassága $x\ cm$, ami csak úgy lehetséges, hogy a harmadik játékos magassága $x+2\ cm$, mert

$$\frac{x+(x-2)+(x+2)}{3}=\frac{3x}{3}=x.$$ 1 pont

Ennek megfelelően a negyedik játékos magassága $x-4\ cm$ kell legyen, és a feltételekből az is következik, hogy az ötödik játékos magassága $x+4\ cm$. 2 pont

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy a hatodik és hetedik játékos magassága $x-6\ cm$, illetve $x+6\ cm$, míg nyolcadik és kilencedik játékos magassága $x-8\ cm$, valamint $x+8\ cm$, végül a tizedik és tizenegyedik játékos magassága $x-10\ cm$, illetve $x+10\ cm$. 1 pont

Ezekből következik, hogy a legalacsonyabb játékos magassága $x-10\ cm$, ő áll a mérési sor utolsó előtti helyén. 2 pont

A feladat feltétele volt, hogy a legalacsonyabb játékos 174 cm-es, ezért $x-10=174\ cm$, ahonnan $x=184\ cm$ következik. 1 pont

A legmagasabb játékos magassága viszont $x+10\ cm$, ez $x=184\ cm$ alapján azt jelenti, hogy a legmagasabb játékos 194 cm-es. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az első néhány játékos magassága egyenletrendszer megoldásával is kiszámítható.

Legyenek a mérési sorrendben vett magasságok rendre: $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{11}$. 1 pont

A feltételek alapján:

$$h_1 - 1 = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Ebből az egyenletből azt kapjuk, hogy

(1) $$h_2 = h_1 - 2.$$ 2 pont

A feladat feltételei szerint az is teljesül, hogy

$$\frac{h_1 + h_2}{2} + 1 = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3},$$

ahonnan $h_2 = h_1 - 2$ behelyettesítésével

(2) $$h_3 = h_1 + 2.$$ 2 pont

Felírhatjuk a feladat feltételeinek megfelelő többi egyenletet is, amelyekből az (1) és (2) összefüggésekhez hasonlóan valamennyi mért magasságot kifejezhetjük h_1-gyel, ezek a következők:

$$h_4 = h_1 - 4,\ h_5 = h_1 + 4,$$
$$h_6 = h_1 - 6,\ h_7 = h_1 + 6,$$
$$h_8 = h_1 - 8,\ h_9 = h_1 + 8,$$
$$h_{10} = h_1 - 10, \text{ végül } h_{11} = h_1 + 10.$$ 2* pont

Nyilvánvaló, hogy a legalacsonyabb játékos magassága $h_{10} = h_1 - 10$, ő áll a mérési sor utolsó előtti helyén.
A feladat feltétele szerint a legalacsonyabb játékos $174\ cm$-es, ezért

$$h_{10} = h_1 - 10 = 174\ cm,$$

ahonnan egyszerű számolással adódik, hogy $h_1 = 184\ cm$, tehát a mérési sorban első játékos magassága $184\ cm$. 1 pont

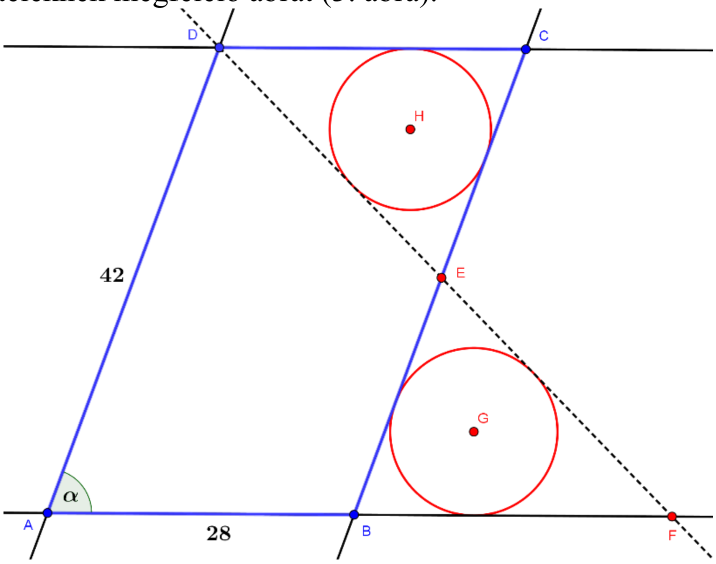
Az is nyilvánvaló, hogy a mérési sorrendben utolsó játékos magassága a legnagyobb, mert $h_{11} = h_1 + 10$.
A legmagasabb játékos magassága tehát $h_{11} = 194\ cm$. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a 2* pontot akkor is megkaphatja a versenyző, ha a h_2 és h_3 magasságok h_1-gyel való kifejezése után nem oldja meg mindegyik egyenletet, de felismeri és megindokolja a $h_{2n} = h_1 - 2n$ és $h_{2n+1} = h_1 + 2n$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ összefüggéseket.

4. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 28$ egység és $AD = 42$ egység.
A D pontot a BC oldal E pontjával összekötő egyenes és az AB egyenes metszéspontja F. Tudjuk, hogy az $ABED$ négyszögbe kör írható, valamint azt, hogy a BFE és az EDC háromszögek beírt köreinek sugara megegyezik.
Határozza meg a $DAB\measuredangle$ nagyságát!

Megoldás:
Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát (3. ábra).



3. ábra

A BFE és az EDC háromszögekben $BEF\measuredangle = CED\measuredangle$ mert csúcsszögek, ugyanakkor a CD és BF oldalak párhuzamossága miatt $FBE\measuredangle = ECD\measuredangle$, illetve $BFE\measuredangle = EDC\measuredangle$, mert ezek a szögpárok váltószögek.
Ezeket felhasználva a BFE és az EDC háromszögek megfelelő szögeinek nagysága egyenlő, tehát a két háromszög hasonló. 1 pont

A feltételek alapján azt is tudjuk, hogy a BFE és az EDC háromszögek G, illetve H középpontú beírt köreinek sugara egyenlő, ez pedig a két háromszög hasonlósága alapján azt is jelenti, hogy a háromszögek egybevágók. 2 pont

Ebből következik, hogy $BE = CE$, ezért az E pont a BC szakasz felezőpontja. 1 pont

Az $ABCD$ paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért $BC = 42$ egység, így

$$BE = CE = 21 \text{ egység.}$$ 2* pont

A feladat feltételéből tudjuk, hogy az $ABED$ négyszögbe kör írható, ez a négyszög tehát érintőnégyszög. Teljesül rá az érintőnégyszögek tulajdonsága, vagyis az, hogy szemközti oldalai hosszának összege egyenlő. Az érintőnégyszögek tulajdonsága alapján:

$$BE + AD = AB + DE.$$

Ebből a $BE = 21, AD = 42$ és $AB = 28$ értékek behelyettesítése után

$$DE = 35 \text{ egység}$$

adódik. 1 pont

Az EDC háromszögben tehát $DE = 35$ egység, $CD = 28$ egység, továbbá $CE = 21$ egység.

$CE = 3 \cdot 7, CD = 4 \cdot 7$ és $DE = 5 \cdot 7$ alapján vegyük észre, hogy

$$CE^2 + CD^2 = DE^2,$$ 1 pont

ebből a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint az következik, hogy az EDC háromszög derékszögű, mégpedig

$$DCE\sphericalangle = 90°.$$ 1* pont

Az $ABCD$ paralelogramma szemközti szögei egyenlők, ezért $DCE\sphericalangle = DAB\sphericalangle$, így azt kapjuk, hogy

$$DAB\sphericalangle = 90°.$$

Ezzel azt is beláttuk, hogy az $ABCD$ paralelogramma téglalap. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

- a versenyző a 2* pontot akkor is megkapja, ha a következőkre hivatkozik: a BFE és EDC háromszögek egybevágósága miatt $BF = 28$ egység, tehát B az AF szakasz felezőpontja. Ugyanakkor $BE \parallel AD$, ezért az FAD háromszög középvonala BE, a középvonal tulajdonsága miatt pedig BE hossza az AD szakasz hosszának fele, tehát $BE = 21$ egység, és így $CE = 21$ egység
- a versenyző az 1* pontot nem kaphatja meg, ha a Pitagorasz-tétel megfordítása helyett a Pitagorasz-tételre hivatkozik
- a $DAB\sphericalangle$ az FAD háromszögre alkalmazott koszinusztétellel is kiszámolható

5. Valaki 1-től indulva összeadta a pozitív egész számokat és eredményül 2016-ot kapott. Utólag rájött, hogy az összeadás során tévedett. Az egyik számban felcserélte az egyesek és a tízesek helyén álló két különböző számjegyet, amelyek közül pontosan az egyik prímszám, és az így kapott számmal végezte az összeadást. Meddig adta össze a számokat és melyik számot rontotta el?

Megoldás:
Legyen a feltételek szerint a helyes összegben szereplő, a számjegyek felcserélésével elrontott, legalább kétjegyű szám A, ebben a tízesek és az egyesek helyén álló számjegyek legyenek rendre a és b.

Ekkor az A szám felírható

$$A = B + 10a + b$$

alakban, ahol B az utolsó két számjegy levágásával keletkező szám, ez a szám 0 is lehet.

Ha az A számban fölcseréljük az a és b számjegyeket, akkor az így kapott A' szám a következőképpen írható fel:

$$A' = B + 10b + a.$$ 1 pont

Ha a pozitív egész számokat 1-től kiindulva egy bizonyos pozitív egész számig összeadjuk, akkor a kétféle összeg különbsége éppen

(1) $$A' - A = 9 \cdot (b - a)$$

lesz. 1 pont

Az (1) különbség legfeljebb 81 lehet, mivel a és b különböző számjegyek, továbbá a hibás és a helyes összeg különbsége (1) szerint 9-cel osztható. 1 pont

A fentiek szerint az összeadás helyes összege ezért a 2016-tól legfeljebb 81-gyel térhet el és a különbség 9-cel osztható, vagyis, ha a helyes összeget S-sel jelöljük, akkor

(2) $$1935 \leq S \leq 2097,$$

ahol $S \in N$. 1 pont

Ha az összeadás 1-től kiindulva 61-ig történt volna, akkor az összeg

$$\frac{1+61}{2} \cdot 61 = 1891$$

lett volna, ez (2) szerint nem lehetséges. Hasonlóképpen nem történhetett az összeadás 61-nél kisebb számig sem.

Ha az összeadás 1-től kiindulva 65-ig történt volna, akkor az összeg

$$\frac{1+65}{2} \cdot 65 = 2145$$

lett volna, ez (2) miatt szintén nem lehetséges. Ugyancsak nem történhetett az összeadás 65-nél nagyobb számig sem.

Az eddigiek szerint az összeadás 1-től kiindulva 62-ig, 63-ig, vagy 64-ig történt. 1 pont

Az összeadás nem valósulhatott meg 1-től kiindulva 64-ig, mert akkor az összeg

$$\frac{1+64}{2} \cdot 64 = 2080$$

lett volna, amelynek a 2016-tól való eltérése 64, de ez a különbség 9-cel nem osztható.

Ha 1-től 63– ig adta volna össze a pozitív egész számokat, az összeg éppen 2016 lenne, azaz nem lett volna számjegycsere. 1 pont

Az egyetlen lehetséges eset, ha 1-től 62-ig történt az összeadás.

Ekkor a helyes összeg

$$\frac{1+62}{2} \cdot 62 = 1953$$

értéket ad, ez 63-mal kevesebb, mint a 2016, és ez a különbség 9-cel osztható. 1 pont

Ez pedig (1) alapján azt jelenti, hogy a hibás és helyes összeg különbsége $A' - A = 9 \cdot (b-a) = 63$, így

(3) $$b - a = 7.$$ 1 pont

Figyelembe véve, hogy a feltétel szerint az elrontott szám egyik számjegye prím, a (3) összefüggés a $b = 9, a = 2$ vagy a $b = 7, a = 0$ számpárokra áll fenn. 1 pont

Ugyanakkor a $b = 7, a = 0$ számpár nem megoldása a feladatnak, mert az ezekből képzett, és a helyes összegben szereplő $10a + b$ szám nem kétjegyű.

Eszerint az összeadás 1-től 62-ig történt, az elrontott szám a 29-es volt, és a hibás összeadáskor 29 helyett 92 hozzáadása valósult meg, így alakult ki a hibás 2016-os összeg. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: eredményünk szerint az összeadás során egyjegyű és kétjegyű számok összeadása történt, ezért az $A = B + 10a + b$ illetve $A' = B + 10b + a$ egyenletekben szereplő B számra nyilvánvalóan $B = 0$ teljesül.

6. Bizonyítsa be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\sqrt{1-cos2\alpha}+\sqrt{1-cos2\beta}>\sqrt{1-cos2\gamma}!$$

1. Megoldás:
Ismert trigonometrikus azonosságot alkalmazva

$1-cos2\alpha=2\cdot sin^2\alpha$, $1-cos2\beta=2\cdot sin^2\beta$, illetve $1-cos2\gamma=2\cdot sin^2\gamma.$ 1 pont

Ezekkel az átalakításokkal a bizonyítandó egyenlőtlenség:
(1) $$\sqrt{2sin^2\alpha}+\sqrt{2sin^2\beta}>\sqrt{2sin^2\gamma}.$$ 2 pont

A négyzetgyök tulajdonsága alapján (1) átalakítható:
(2) $$\sqrt{2}\cdot|sin\alpha|+\sqrt{2}\cdot|sin\beta|>\sqrt{2}\cdot|sin\gamma|,$$

ezért (2) a bizonyítandóval ekvivalens egyenlőtlenség. 1 pont

Mivel α, β, γ egy háromszög szögei, ezért $sin\alpha, sin\beta$ és $sin\gamma$ pozitív számok,
így (2) mindkét oldalának $\sqrt{2}$-vel való osztása után az egyenlőtlenséget az abszolút-érték jele nélkül is felírhatjuk, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség:

(3) $$sin\alpha+sin\beta>sin\gamma.$$ 2 pont

A pozitív $sin\gamma$ tényezővel osztva (3) mindkét oldalát:

$$\frac{sin\alpha}{sin\gamma}+\frac{sin\beta}{sin\gamma}>1$$

a bizonyítandó. 1 pont

Legyenek a háromszög α, β, γ szögeivel szemben levő oldalak hosszúságai rendre a, b, c.

Felírjuk a szinusztételt, amely szerint $\frac{sin\alpha}{sin\gamma}=\frac{a}{c}$, valamint $\frac{sin\beta}{sin\gamma}=\frac{b}{c}$, és így az

(4) $$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}>1$$
bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

A (4) egyenlőtlenségből a pozitív c számmal történő szorzás után kapjuk, hogy

$$a+b>c,$$

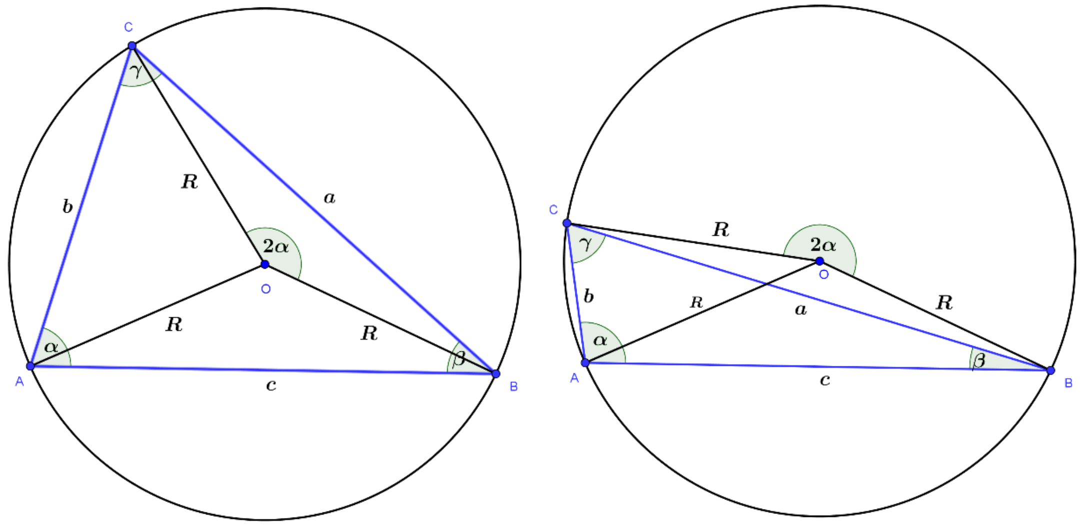
ez pedig a minden háromszögre igaz háromszögegyenlőtlenség. 1 pont

Átalakítási lépéseink megfordíthatók voltak, tehát a kiindulási egyenlőtlenség igaz. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Legyen R a háromszög körülírt körének sugara, az α, β, γ szögekkel szemközti oldalak hossza rendre a, b, c.
A háromszög α szöge lehet hegyesszög, tompaszög, vagy derékszög, az első két esetet a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra

A kerületi és középponti szögek összefüggése szerint az a oldalhoz tartozó középponti szög 2α. 1 pont

A 4. ábra OBC háromszögeiben felírva a koszinusztételt:
$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot cos2\alpha,$$
illetve
$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot cos(360° - 2\alpha).$$ 1 pont

Mindkét egyenlet az
(1) $$a^2 = 2R^2 \cdot (1 - cos2\alpha)$$

egyenletre vezet, hiszen egy trigonometriai azonosság szerint $cos(360° - 2\alpha) = cos2\alpha$. 2 pont

Nyilvánvaló, hogy $a > 0$ és $R > 0$, ezért (1) szerint $1 - cos2\alpha > 0$, így

(2) $$a = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos2\alpha}.$$ 2 pont

Végül, ha $\alpha = 90°$, akkor $a = 2R$.
A (2) összefüggés azonban ekkor is fennáll, hiszen $2\alpha = 180°$,
ezért $cos2\alpha = cos180° = -1$, és így $a = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2R$ valóban igaz. 1 pont

A (2)-höz hasonlóan adódnak a

(3) $$b = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos2\beta}$$
és
(4) $$c = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos2\gamma}$$

összefüggések is. 1 pont

Írjuk most föl a minden háromszögre érvényes háromszög-egyenlőtlenséget:

(5) $$a + b > c.$$ 1 pont

Helyettesítsük az (5) egyenlőtlenségbe az a, b, c oldalhosszakra vonatkozó (2), (3) és (4) eredményeket, ezzel

$$R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos2\alpha} + R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos2\beta} > R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos2\gamma},$$

ahonnan a nyilván pozitív $R \cdot \sqrt{2}$ tényezővel való osztással kapjuk a bizonyítandó

$$\sqrt{1 - cos2\alpha} + \sqrt{1 - cos2\beta} > \sqrt{1 - cos2\gamma}$$

egyenlőtlenséget. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

- a háromszögegyenlőtlenség miatt nyilvánvaló, hogy nem állhat fenn egyenlőség
- a fentiekhez teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy tetszőleges háromszögben a

$$\sqrt{1 - cos2\alpha} + \sqrt{1 - cos2\gamma} > \sqrt{1 - cos2\beta}$$

és

$$\sqrt{1 - cos2\beta} + \sqrt{1 - cos2\gamma} > \sqrt{1 - cos2\alpha}$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek