A 2011/2012. tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójának feladatai és megoldásai fizikából

I. kategória

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első három feladat és a 4/A és 4/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Ha valaki a 4/A és 4/B feladatra is ad megoldást, csak az egyiket, a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe. Minden feladat teljes megoldása 20 pontot ér.

1. *Egy állandó szélességű és sebességű folyón egy evezős úgy kelt át, hogy a folyó szélességének feléig a folyó sebességének irányára merőlegesen evezett, majd a vízhez képest a partra merőleges irányhoz viszonyítva 60°-os szögben felfelé evezett. (A vízhez viszonyított sebességének nagysága mindkét esetben azonos, az irányváltoztatás ideje pedig az átkelés idejéhez képest elhanyagolható volt.) Így a kiindulási ponttal szemközti pontban ért partot.*

a) A mozgás második szakasza hányszor hosszabb ideig tartott, mint az első szakasz?

b) A mozgás első szakaszában a csónak parthoz viszonyított sebességének iránya mekkora szöget zárt be az indulási pontot a szemközti ponttal összekötő egyenessel (mekkora szögben sodródott lefelé a csónak)?

I. Megoldás

Legyen az evezős sebességének nagysága v, a második részben a partra merőleges iránnyal bezárt szöge α, a folyó sebességének nagysága c, a folyó szélessége $2d$.

A sodródás φ szögére teljesül, hogy

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{c}{v},$$

azaz a szög tangense a két sebesség hányadosa.

Az irányváltoztatásig

$$t = \frac{d}{v}$$

idő telt el, ezalatt a csónak

$$y = ct = \frac{dc}{v}$$

távolságnyit sodródott a parttal párhuzamosan.

Az irányváltoztatás után

$$t' = \frac{d}{v\cos\alpha} = \frac{t}{\cos\alpha} = \frac{t}{\cos 60^\circ} = 2t$$

idő telt el.

a) Tehát a mozgás második szakasza **kétszer** hosszabb ideig tartott, mint az első.

t' idő alatt a csónak

$$y' = t'\left(v\sin a - c\right) = \frac{d\left(v\sin a - c\right)}{v\cos a}$$

nagyságú utat tett meg felfelé.

Mivel szemben kötött ki, ezért $y = y'$, azaz

$$\frac{dc}{v} = \frac{d\left(v\sin a - c\right)}{v\cos a},$$

vagyis

$$c = \frac{v\sin\alpha - c}{\cos\alpha},$$

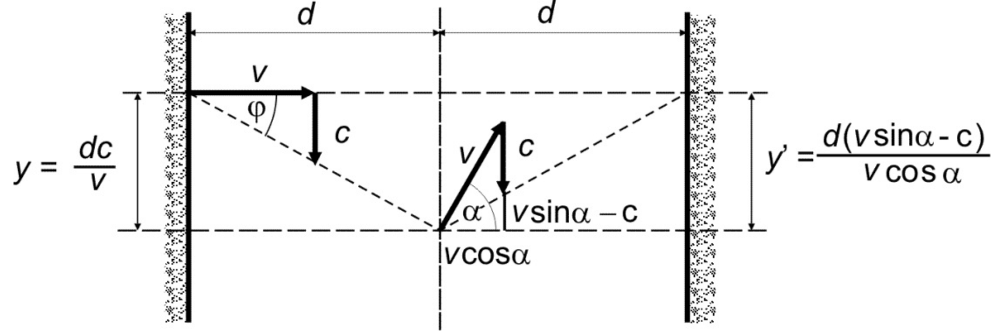
tehát

$$c\cos\alpha = v\sin\alpha - c,$$

behelyettesítve:

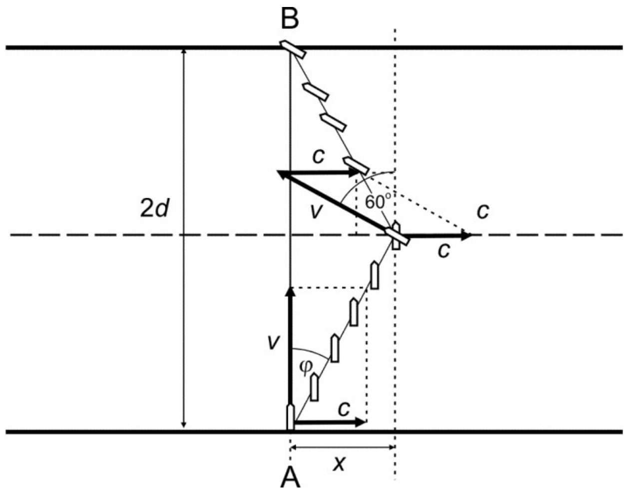
$$\frac{c}{v} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \mathrm{tg}30°.$$

b) A sodródás szöge tehát **30°.**



II. Megoldás

Jelöljük a folyó szélességét $2d$-vel, sebességét c-vel, a csónak folyóhoz viszonyított előrehaladási sebességét v-vel, a keresett szöget φ-vel! Tekintsük a folyót futószalagnak, vagyis olyan képzeletbeli folyónak, amelynek a sebessége a parttó a közepéig mindenütt azonos! Lásd az ábrát!



Az ábrából látszik, hogy

$$\frac{c}{v} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{x}{d}. \tag{1}$$

Másrészt a fordulópontnál a sebességkomponensek aránya:

$$\frac{v\sin 60° - c}{v\cos 60°} = \frac{x}{d}. \qquad (2)$$

Osszuk a számlálót és nevezőt v-vel!

$$\frac{\sin 60° - \frac{c}{v}}{\cos 60°} = \frac{x}{d}.$$

Használjuk fel (1)-et:

ill.

$$\frac{\sin 60° - \mathrm{tg}\varphi}{\cos 60°} = \mathrm{tg}\varphi,$$

ahonnan

$$\sin 60° - \mathrm{tg}\varphi = \cos 60° \mathrm{tg}\varphi \quad \rightarrow \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin 60°}{1 + \cos 60°}.$$

A keresett szög tehát

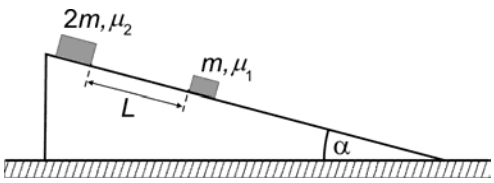
$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sin 60°}{1+\cos 60°} = \mathrm{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \mathbf{30°}.$$

2. *Egy* α = 15°*-os hajlásszögű lejtőre két kicsiny testet helyezünk, amelyek egymástól* L = 26 m *távolságra vannak. Az alsó test tömege m, közte és a lejtő között mind a csúszási, mind a tapadási súrlódás együtthatója* μ_1= 0,6. *A felső test tömege* 2*m, közte és a lejtő között mind a csúszási, mind a tapadási súrlódás együtthatója* μ_2= 0,25. *Számoljunk g* = 10 m/s^2*-tel!*

A két testet egyszerre elengedjük. Ütközésük tökéletesen rugalmasnak tekinthető.

a) Az alsó test kezdeti helyzetéhez képest mekkora távolságra következik be a második ütközés?

b) Mennyi idő telik el az első és a második ütközésük között?



Megoldás

Bontsuk fel a testekre ható erőket a lejtővel párhuzamos és merőleges összetevőkre. A lejtő síkjában lefelé a nehézségi erő $mg\sin\alpha$ összetevője hat, a lejtőn felfelé pedig a súrlódási erő, amelynek tapadás esetén $\mu mg\cos\alpha$ a maximuma. E kettő viszonyától függ, hogy a test megcsúszik-e, vagy állva marad. Ha $mg\sin\alpha > \mu mg\cos\alpha$, vagyis $\mathrm{tg}\alpha > \mu$, akkor a test megcsúszik, ellenkező esetben állva marad.

Az m tömegű test esetén (a későbbiekben jelöljük ezt 1-gyel, a másikat 2-vel!)

$$\mathrm{tg}15° = 0{,}268 < 0{,}6,$$

tehát a lejtőn állva marad, a másik esetén

$$\mathrm{tg}15° = 0{,}268 > 0{,}25,$$

vagyis megcsúszik. A felső test gyorsulása

$$g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) = 0{,}173\,\mathrm{m/s}^2.$$

Sebessége az ütközés előtt a $v^2 = 2aL$ összefüggésből $v = 3$m/s.

Mivel az ütközés pillanatszerű, az ütközés alatt a lendületük megmarad. A tökéletes rugalmasság miatt a mechanikai energiájuk is, s mivel az ütközés pillanatában a testek helyzete sem változik, ezért mozgási energiájuk megmarad. A pozitív irány legyen lefele, a $2m$ tömegű test sebességét jelölje *u,* az *m*-ét *c*, ezzel az egyenletek a lendületre és az energiára:

$$2mv = 2mu + mc$$

$$\frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}2mu^2 + \frac{1}{2}mc^2$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$u = \frac{v}{3} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}},\ \text{ és }\ c = \frac{4}{3}v = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehát mindkét test lefelé indul.

A következő ütközés bekövetkezhet úgy, hogy az alsó még mozog, amikor a felső nekimegy, és úgy is, hogy az alsó áll már, amikor ütköznek.

Az alsó test gyorsulásának nagysága

$$g\left(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha\right) = 3{,}207\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

iránya felfelé mutat. Az alsó test ütközés nélkül

$$\frac{c}{a} = 1{,}247\text{s}$$

múlva állna meg, közben megtenne

$$\frac{ct}{2} = 2{,}49\text{ m}$$

utat, s ott is maradna. A felső test ezen idő alatt ütközés hiányában

$$ut + \frac{g}{2}\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha\right)t^2 = 1{,}247 + 0{,}5\cdot 0{,}173\cdot 1{,}247^2 = 1{,}38\text{ m}$$

utat tenne meg. Tehát az ütközés még nem következhetett be.

a) Így tehát az álló alsó testbe csúszik bele a felső, amely az első ütközéstől **2,49 m** utat tesz meg.

b) A keresett időre így teljesül, hogy

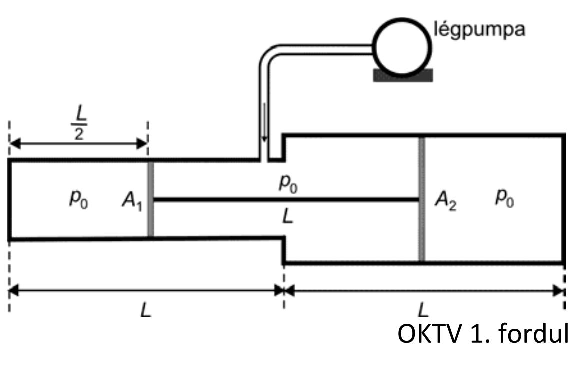
$$2{,}49 = t + 0{,}5\cdot 0{,}173\cdot t^2.$$

Ennek pozitív gyöke 2,1. Tehát a két ütközés között **2,1 s** telik el.

3. *Két, egyenként L=* 5 dm *hosszú, A_1* = 2 dm^2 *és A_2* = 6 dm^2 *keresztmetszetű henger csatlakozik egymáshoz az ábra szerint. Mindkét hengerben egy-egy jól záródó, vékony dugattyú helyezkedik el egy L hosszúságú merev rúddal összekötve,. L*/2 *távolságra a henger zárólapjától. Kezdetben a három térrészben normál állapotú levegő van.*

Mekkora lesz a két szélső térrészben a nyomás, ha a középső részben a pumpával igen lassan a légköri nyomás másfélszeresét hozzuk létre?

A folyamat alatt gondoskodunk a hőmérséklet állandó értéken tartásáról.



Megoldás

Ha a levegőt lassan bepumpáljuk, egyensúlyi (ún. „kvázisztatikus”) folyamattal kerül a rendszer a végállapotba. A két dugattyú méretkülönbsége miatt már kezdetben is különböző nagyságú erők hatottak a bal oldali és a jobb oldali tartályban levő levegő részéről a két, összekötött dugattyúra, azonban kezdetben, a középső tartománybeli levegő ezeket éppen nullára kompenzálta.

Miután levegőt pumpáltunk a középső részbe, ez az egyensúly megbomlott, és a dugattyúk a lassú folyamat miatt elhanyagolható sebességgel eltolódtak a hengerekben. Ennek következtében megváltozott a két oldalon a nyomás úgy, hogy az erők végül ismét egyensúlyba kerülnek. Látható, hogy a nagyobb keresztmetszetű hengerben nőnie kell a nyomásnak, így az összekötött dugattyúk jobbra tolódnak el, kellően megnövelve a jobb oldali részben a nyomást.

Három ismeretlenünk van: az x elmozdulás és a két végső nyomás a két szélső térrészben. Egyenleteink: az erők egyensúlya és a két gáztörvény a szélső tartályrészekben levő levegőre. Hogy meghatározhassuk a keresett nyomásokat, először ki kell számolnunk a térfogatváltozásokat (ill. a dugattyúk elmozdulását).

Jelöljük p_{A} ill. p_{B}-vel a bal oldali ill. a jobb oldali térrészben uralkodó végső nyomást, x-szel a dugattyúk elmozdulását! Ekkor a végállapotra felírt Newton törvénye, valamint a két szélső részre felírható gáztörvény a következő:

$$p_{\mathrm{A}}A_1 - 1,5p_0A_1 + 1,5p_0A_2 - p_{\mathrm{B}}A_2 = 0 \tag{1}$$

$$p_0A_1\frac{L}{2} = p_{\mathrm{A}}A_1\left(\frac{L}{2}+x\right) \quad\rightarrow\quad p_0L = p_{\mathrm{A}}\left(L+2x\right), \tag{2}$$

$$p_0A_2\frac{L}{2} = p_{\mathrm{B}}A_2\left(\frac{L}{2}-x\right) \quad\rightarrow\quad p_0L = p_{\mathrm{B}}\left(L-2x\right). \tag{3}$$

Innen a nyomások:

$$p_{\mathrm{A}} = \frac{p_0L}{L+2x}, \tag{2'}$$

$$p_{\mathrm{B}} = \frac{p_0L}{L-2x}. \tag{3'}$$

Ezeket (1)-be írva:

$$\frac{p_0L}{L+2x}A_1 + 1,5p_0\left(A_2-A_1\right) - \frac{p_0L}{L-2x}A_2 = 0$$

Szorozva L^2-4x^2-tel és osztva p_0-lal:

$$L\left(L-2x\right)A_1 + 1,5\left(A_2-A_1\right)\left(L^2-4x^2\right) - L\left(L+2x\right)A_2 = 0$$

Rendezés:

$$L^2A_1 - 2LA_1x + 1,5\left(A_2-A_1\right)L^2 - 1,5\left(A_2-A_1\right)4x^2 - L^2A_2 - 2LA_2x = 0,$$
$$1,5\left(A_2-A_1\right)4x^2 + 2L\left(A_2+A_1\right)x - 0,5\left(A_2-A_1\right)L^2 = 0.$$

Beírva az adatokat a mérőszám-egyenlet:

$$1,5\cdot4\cdot4x^2 + 2\cdot5\cdot8x - 0,5\cdot4\cdot25 = 0.$$
$$24x^2 + 80x - 50 = 0.$$

A dugattyúk elmozdulása:

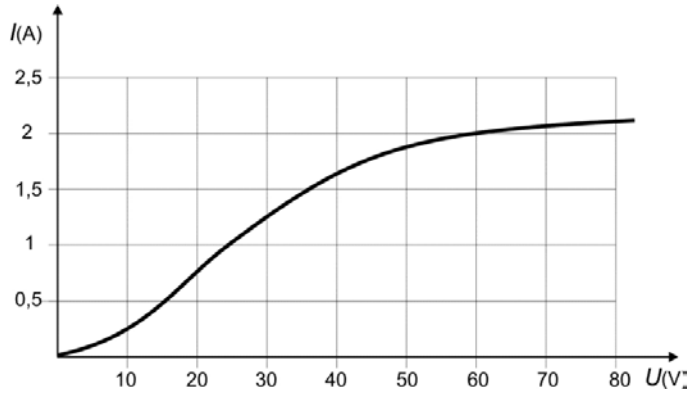
$$x = \frac{-80\pm\sqrt{80^2+4\cdot24\cdot50}}{48}\ \mathrm{dm} = 0,538\ \mathrm{dm}.$$

Ezt felhasználva a (2’) és (3’) egyenletből adódik a válasz a nyomásokra:

$$p_A = \frac{p_0 L}{L+2x} = 10^5 \cdot \frac{5}{5+2\cdot 0,538}\ \text{Pa} = \mathbf{0.823 \cdot 10^5\ Pa},$$
$$p_B = \frac{p_0 L}{L-2x} = 10^5 \cdot \frac{5}{5-2\cdot 0,538}\ \text{Pa} = \mathbf{1.274 \cdot 10^5\ Pa}.$$

4.A *Egy ismeretlen szerkezetű lámpa áram-feszültség összefüggését mutatja a grafikon, vagyis a grafikonról leolvasható, hogy mekkora a lámpán átfolyó áram erőssége, ha a csatlakozóira valamekkora feszültséget kapcsolunk. Ezzel a lámpával sorba kötünk egy* 10 Ω*-os ellenállást, majd erre a rendszerre feszültségforrást csatlakoztatunk.*

Mekkora a forrás által másodpercenként leadott energia, ha a lámpára jutó energia háromszor akkora, mint az ellenálláson keletkező hő?



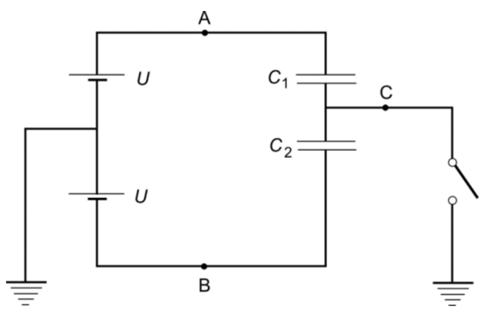
Megoldás

Akkor jut a lámpára háromszor akkora teljesítmény, mint a 10 Ω-os ellenállásra, ha a lámpa ellenállása 30 Ω, hiszen soros kapcsoláskor az áramok megegyeznek ($P = RI^2$). Tehát a grafikon alapján azt kell meghatároznunk, hogy milyen feszültség esetén lesz a lámpa ellenállása éppen 30 Ω. Vagy egyszerűen a grafikont használhatjuk, vagy berajzolhatunk egy origón átmenő egyenest $\left(I = \frac{U}{30\Omega}\right)$. Megállapíthatjuk, hogy a feladatnak két megoldása van, a lámpa ellenállása akkor 30 Ω, ha a feszültsége vagy 15 V, vagy 60 V. Ekkor a lámpán átfolyó áram erőssége 0,5, illetve 2 A.

Tehát a forrás feszültsége vagy 20 V, vagy 80 V; míg a forrás áramerőssége is 0,5 A, vagy 2 A. Ezért a forrás által leadott teljesítmény vagy **10 W** vagy **160 W**, vagyis a másodpercenként leadott energia **10 J** vagy **160 J**. A helyes végeredmény megadható joule-ban és watt = joule/másodpercben is.

4.B *Két egyforma,* U = 12 V*-os ideális telepet és két kondenzátort sorba kötünk. Az egyik kondenzátor kapacitása* C_1 = 2 μF, *a másiké* C_2 = 3 μF. *A két telep közötti pontot földeljük, és a két kondenzátor közötti pont földelését is lehetővé tesszük egy kapcsoló közbeiktatásával az ábrán látható módon. Kezdetben a kapcsoló nyitott.*

Mekkora töltések folynak át az ***A***, ***B*** *és* ***C*** *pontokon, ha a kapcsolót zárjuk?*



Megoldás

Nyitott kapcsolóállásnál a két sorba kötött kondenzátor eredő kapacitása:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 3}{2+3}\ \mu\text{F} = 1{,}2\ \mu\text{F}.$$

Tehát ilyenkor mindkét kondenzátoron $Q = C(2U) = 28{,}8\ \mu\text{C}$ töltés van.

A kapcsoló zárásakor olyan helyzet alakul ki, mintha az egyes kondenzátorokra külön-külön kapcsolnánk egy-egy telepet. Az (1) jelű kondenzátor töltése

$$Q_1 = C_1 U = 24\ \mu\text{C}$$

lesz, a (2) jelű kondenzátoré pedig

$$Q_2 = C_2 U = 36\ \mu\text{C}.$$

A földelt fegyverzetek közül az (1) jelű kondenzátor fegyverzete negatív töltésű lesz, a (2) jelű pedig pozitív. Mivel kezdetben az érintkező fegyverzetek eredő töltése nulla volt, így a **C** ponton keresztül

$$(36 - 24)\ \mu\text{C} = \mathbf{12\ \mu C}$$

töltés folyik át.

Az (1) jelű kondenzátor töltése csökken, tehát az **A** ponton keresztül

$$(28{,}8 - 24)\ \mu\text{C} = \mathbf{4{,}8\ \mu C}$$

töltés folyik vissza a telepbe. A (2) jelű kondenzátor töltése növekszik, vagyis a **B** ponton keresztül

$$(36 - 28{,}8)\ \mu\text{C} = \mathbf{7{,}2\ \mu C}$$

nagyságú, negatív töltés folyik a telepből ennek a kondenzátornak az alsó fegyverzetébe.

Belátható, hogy az **A** és **B** pontokon átfolyó töltések összege éppen megegyezik a **C** ponton átfolyó töltés nagyságával.

Pontozási útmutató a 2011/2012. tanévi fizika OKTV első fordulójának feladatmegoldásaihoz
I. kategória

Minden feladat teljes megoldása 20 pontot ér.
Részletes, egységes pontozás nem adható meg a feladatok természetéből következően, ugyanis egy-egy helyes megoldáshoz több különböző, egyenértékű helyes út vezethet.
A feladat numerikus végeredményével megközelítően azonos eredményt kihozó megoldó erre a részfeladatra 0 pontot kap, amennyiben elvileg helytelen úton jut el. Fizikailag értelmes gondolatmenet estén a kis numerikus hiba elkövetése ellenére (a részfeladat terjedelmétől függően) 2-3 pont vonható le.
Ha a megoldó csak paraméteresen adja meg a helyes gondolatmenettel kapott eredményt, 2 pontot veszít.

1. feladat

A mozgás leírása az irányváltoztatásig (helyes gondolatmenet, vagy egy helyes ábra)	*2 pont*
Az irányváltoztatásig eltelt idő (*t*) felírása	*2 pont*
Az irányváltoztatásig az elsodródás (*y*) felírása	*2 pont*
A mozgás leírása az irányváltozás után (helyes gondolatmenet, vagy egy helyes ábra)	*4 pont*
Az irányváltoztatás után eltelt idő (*t′*) felírása	*2 pont*
$t'=2t$ megadása	*2 pont*
y' felírása	*3 pont*
φ kiszámítása ($\varphi = 30^o$)	*3 pont*

2. feladat

Megcsúszás vizsgálata	
Felső elindul	*1 pont*
Alsó állva marad	*1 pont*
Felső test ütközés előtti sebességének (v = 4m/s) kiszámítása	*2 pont*
Lendület megmaradás indoklása	*1 pont*
A lendület megmaradási egyenlet felírása	*1 pont*
A mozgási energia megmaradás indoklása	*1 pont*
A mozgási energia-megmaradási egyenlet felírása	*1 pont*
Az egyenletrendszer megoldása (u=1m/s, c=4m/s)	*3 pont*
Az újabb ütközési lehetőségek észrevétele	*1 pont*
Az alsó test gyorsulása felfele 3,2m/s^2 (kerekítve)	*1 pont*
Az alsó test útja megállásig 2,5m (kerekítve)	*1 pont*
Ott is marad	*1 pont*
Ez alatt a felső test útja kisebb 2,5m (1,38m)	*1 pont*
a) Az alsó test kezdeti helyzetéhez képest **2,5m** távolságra következik be a második ütközés.	*1 pont*
Az ütközésig eltelt időre vonatkozó egyenlet felírása	*2 pont*
b) Az egyenlet megoldása. **2,1s** idő telik el első és második ütközésük között	*1 pont*

3. feladat

Annak felismerése, hogy az összekötött dugattyúk jobbra tolódnak el	*2 pont*
Annak felismerése, hogy a Newton törvény és két gáztörvény vezet a megoldáshoz	*2 pont*
Az erők egyensúlyának helyes felírása	*2 pont*
A két gáztörvény helyes felírása	*4 pont*
Az egyenletrendszere átalakítása a másodfokú alakig az elmozdulásra	*5 pont*
A keresett elmozdulás helyes meghatározása	*3 pont*
A két nyomásérték helyes meghatározása	*2 pont*

4/A feladat

Annak felismerése, hogy a lámpa ellenállása a kérdéses esetben 30 Ω	*4 pont*
Az egyik megoldás helyes meghatározása	*8 pont*
A másik megoldás helyes meghatározása	*8 pont*

4/B feladat

Az eredő kapacitás meghatározása nyitott kapcsolóállásnál	*3 pont*
A kondenzátorokon lévő töltés kiszámítása nyitott kapcsolóállásnál	*2 pont*
A kapcsoló zárásakor kialakuló áramkör helyes értelmezése	*4 pont*
A kondenzátorok töltésének helyes meghatározása zárt kapcsolóállásnál	*2 pont*
A **C** ponton átfolyó töltés helyes meghatározása	*3 pont*
Az **A** ponton átfolyó töltés helyes meghatározása	*3 pont*
A **B** ponton átfolyó töltés helyes meghatározása	*3 pont*