A 2012/2013. Tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójának feladatai és megoldásai

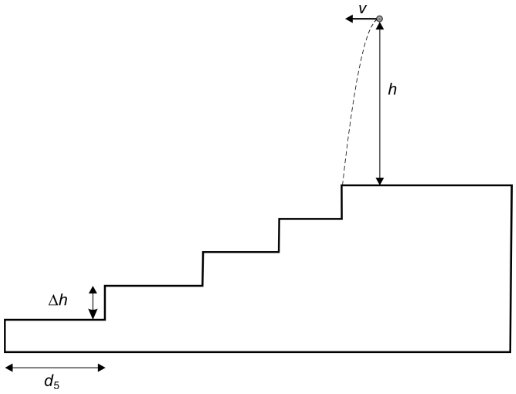
I. kategória

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első három feladat és a 4/A és 4/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Csak 4 feladat megoldására adható pont. A 4/A és 4/B feladat közül a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe.

1. *Lépcsőzetes kialakítású merev, súrlódásmentesnek tekinthető felület legfelső foka felett* h = 1,25 m *magasságból, vízszintesen,* v = 0,6 m/s *sebességgel eldobunk egy abszolút rugalmas golyót a lépcső élére merőleges irányban. Az egyes „lépcsőfokok” magassága* Δh = 0,25 m, *szélességük eltérő. A golyó mindig az egymást követő lépcsőfokok vízszintes felületének szélére esik.*

a) Milyen széles az ötödik lépcsőfok (d_5)?

b) Írjuk fel általánosan az n-edik lépcsőfok szélességét (n > 1)!



Megoldás. Mivel (súrlódás hiányában) az energia, és a vízszintes lendület megmarad, a golyó nem kezd forogni az ütközések után, és minden ütközést követően az eredeti magasságba pattan vissza. Az egymás utáni ütközések közti idő azonban egyre növekszik, hiszen mindig hosszabb esési utat kell megtennie a golyónak, ezért az állandó vízszintes sebességgel egyre nagyobb lesz a vízszintes elmozdulása is.

Az egymás után következő lépcsőfokok szélességei egy növekvő sorozatot alkotnak. Az ötödik lépcsőfok szélességének meghatározásához azonban nem kell az összes közbenső lépcső szélességét kiszámítani. Felhasználjuk azt, hogy mind a felszálló ág mind a leszálló ág megtételéhez szükséges idő $\sqrt{\frac{2h}{g}}$, ahol h a felszálló, ill. a leszálló ág függőleges elmozdulása.

Az egymás utáni ütközések közötti időket általánosan a következőképpen lehet felírni:

b)
$$t_\mathrm{n} = t_\mathrm{nfel} + t_\mathrm{nle} = \sqrt{\frac{2\left[h+(n-2)\Delta h\right]}{g}} + \sqrt{\frac{2\left[h+(n-1)\Delta h\right]}{g}}.$$

Az n-ik lépcsőfok szélessége általánosan:

$$d_n = v\left(\sqrt{\frac{2\left[h+(n-2)\Delta h\right]}{g}} + \sqrt{\frac{2\left[h+(n-1)\Delta h\right]}{g}}\right).$$

Alkalmazva esetünkre (n = 5):

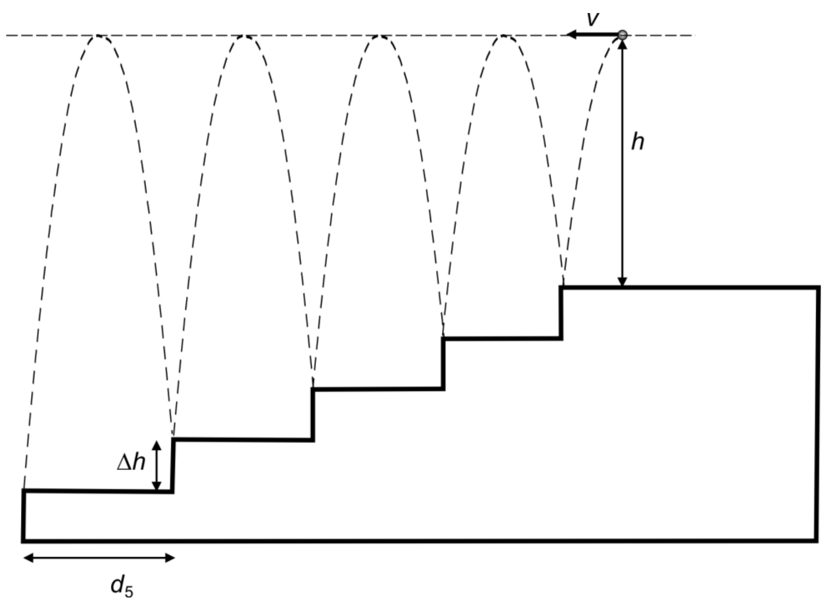
a)
$$t_5=\sqrt{\frac{2(h+3\Delta h)}{g}}+\sqrt{\frac{2(h+4\Delta h)}{g}}\,.$$

Ezzel az ötödik lépcsőfoknak

$$d_5=vt_5=v\left(\sqrt{\frac{2(h+3\Delta h)}{g}}+\sqrt{\frac{2(h+4\Delta h)}{g}}\right)=$$

$$=0,6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(\sqrt{\frac{2(1,25\mathrm{m}+3\cdot 0,25\mathrm{m})}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}+\sqrt{\frac{2(1,25\mathrm{m}+4\cdot 0,25\mathrm{m})}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\right)=\mathbf{0,782\,m}$$

hosszúnak kellett lennie.



2. *Az ábrán látható α =* 15°*-os hajlásszögű lejtőre két, egymással L=*1,5 m *hosszúságú feszes fonállal összekötött testet helyeztek. A felső test tömege m* = 0,5 kg*, közte és a lejtő között mind a csúszási, mind a tapadási súrlódás együtthatója* μ_1 = 0,3. *Az alsó test tömege* 2*m, közte és a lejtő között mind a csúszási, mind a tapadási súrlódás együtthatója* μ_2 = 0,2.

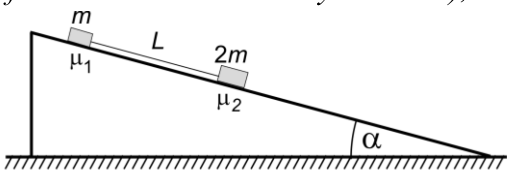
a) A testek elengedése után mekkora a fonálerő?

b) A testek elengedése után mennyi idő múlva kerül a felső test az alsó indulási helyére?

Ezt követően felcseréljük a két testet (az alsó a felső, a felső az alsó eredeti helyére kerül), s egyszerre engedjük el a testeket.

c) Mekkora a fonálerő a testek elengedése után?

d) Mennyi idő múlva kerül a felső test az alsó helyére?



Megoldás. Bontsuk fel a testekre ható erőket a lejtővel párhuzamos és merőleges összetevőkre. Ha a testek külön-külön vannak a lejtőre téve, akkor lefele a nehézségi erő *mg*sin*α* összetevője hat, felfele pedig a súrlódási erő, melynek tapadás esetén *μmg*cos*α* a maximuma. E kettő viszonyától függ, hogy a test megcsúszik-e, vagy állva marad.

Ha $mg\sin\alpha > \mu mg\cos\alpha$, vagyis $\text{tg}\alpha > \mu$, akkor a test megcsúszik, ellenkező esetben állva marad.
Az m tömegű test esetén (jelöljük ezt 1-essel, a másikat 2-essel) $\text{tg}15^o = 0{,}268 < 0{,}3$, tehát a lejtőn állva maradna, a másik esetén $\text{tg}15^o = 0{,}268 > 0{,}2$, vagyis megcsúszna.
Az alsó test vagy elhúzza a felsőt, vagy meg sem moccan.
a) Tegyük fel, hogy a két test elindul, $K > 0$ kötélerő lép fel, a közös gyorsulás $a > 0$ lefele.
A mozgásegyenletek az egyes testekre vonatkozólag

$$2mg(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) - K = 2ma$$
$$mg(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) + K = ma$$

A második egyenletet kettővel szorozva, és a kettőt egyenlővé téve

$$K = \frac{2mg\cos\alpha\left(\mu_1 - \mu_2\right)}{3} = 0{,}32\ \text{N}.$$

b) Adjuk össze a két egyenletet

$$3ma = 2mg(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) + mg(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)$$
$$a = \frac{g}{3\left[3\sin\alpha - \left(2\mu_2 + \mu_1\right)\cos\alpha\right]} = 0{,}334\text{m}/\text{s}^2.$$

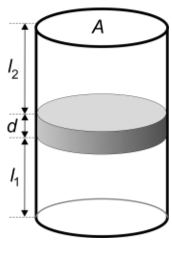
(Vagyis az alsó elhúzza a felsőt.)
Akkor kerül a felső az alsó helyére, ha ezzel a gyorsulással $s = L$ utat tesznek meg. A négyzetes úttörvényből $\quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}5}{0{,}334}\text{s}^2} \approx \mathbf{3(s)}$

c) Ha a testeket felcseréljük, akkor az alulra kerülő m tömegű test állva marad, mivel a fonál nem tud nyomni, vagyis a fonálerő nulla.
d) A felső test $a' = g\ (\sin\alpha - \mu_2\ \cos\alpha) = 0{,}656\text{m/s}^2$ gyorsulással $t' = \sqrt{\frac{2s}{a'}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}5}{0{,}656}\text{s}^2} = \mathbf{2{,}14(s)}$ idő alatt kerül a másik „helyére", ha ott nem állna. Így meglöki, majd a helyére kerül.

3. *Függőleges tengelyű, A keresztmetszetű, henger alakú tartályban d vastagságú dugattyú azonos, n anyagmennyiségű, T hőmérsékletű levegőt zár el egymástól. A súrlódásmentesen mozgó dugattyú alatt l_1, felette l_2 hosszúságú levegőoszlop van.*

a) Milyen egynemű anyagból készülhetett a dugattyú?

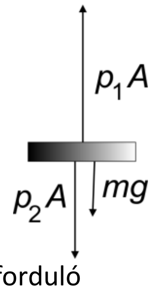
b) A tartály és a dugattyú tömege egyenlő. Egyszer csak a tartály alátámasztását megszüntetjük. Mekkora lesz a dugattyú, illetve a tartály gyorsulása az elengedést követő pillanatban?



Adatok: n = 0,002 mol, d = 2 cm, A = 100 cm^2, $T = 34\ ^\circ C$, l_1 = 7,8 cm, l_2 = 8,5 cm.

Megoldás. *a)* Írjuk fel a dugattyú egyensúlyának dinamikai feltételét!

$$mg = (p_1 - p_2)A$$



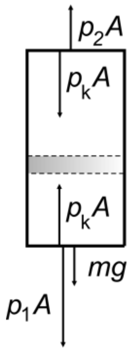
Beírva a nyomásokat az állapotegyenletből, és kifejezve a tömeget:

$$m=\left(\frac{nRT}{l_1A}-\frac{nRT}{l_2A}\right)\cdot\frac{A}{g}=\frac{nRT}{g}\left[\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}\right]=0{,}5264\ \text{kg}\,.$$

A sűrűséget a tömeg és térfogat hányadosa szolgáltatja:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{dA}=\frac{0{,}5264\ \text{kg}}{2\cdot10^{-2}\,\text{m}\cdot10^{-2}\,\text{m}^2}=2632\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,.$$

A függvénytáblázat alapján valószínűsítjük, hogy a henger anyaga **alumínium**.

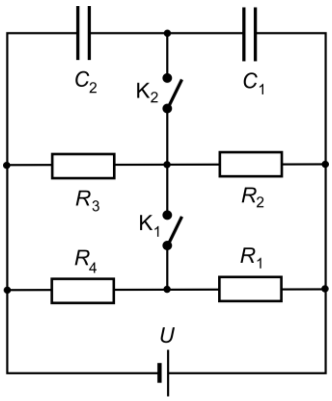


b) A dugattyúra ható erők nem változnak, ezért annak gyorsulása továbbra is nulla. A tartályra a gázon kívül a külső levegő is erőt fejt ki, alulról felfelé p_kA-t, felülről lefelé ugyanennyit. Ezek eredője nulla. Így a tartályra vonatkozó mozgásegyenlet:

$$p_1A+mg-p_2A=ma,$$

azaz $(p_1-p_2)A+mg=ma,$ viszont $(p_1-p_2)A=mg,$ ezzel $2mg = ma$, ahonnan a tartály gyorsulása $a = \mathbf{2g}$.

4/A *Az ábra szerinti elrendezésben kezdetben mindkét kapcsoló nyitva van.* R_1 = 300 kΩ, R_2 = 200 kΩ, R_3 = 400 kΩ, R_4 =100 kΩ, C_1 = 40 μF, C_2 = 10 μF, U = 300 V.



a) A K_1 kapcsolót zárjuk. A zárást követő két másodpercben hány elektron és merre halad át rajta?

b) Majd zárjuk a K_2 kapcsolót is. Hány elektron és merre halad át rajta, amíg a kondenzátorok feszültsége állandósul?

c) Ezt követően a K_1 kapcsolót nyitjuk. Hány elektron és merre halad át a K_2 kapcsolón, amíg a kondenzátorok feszültsége ismét állandósul?

Megoldás. *a)* A K_1 kapcsoló zárása után az egyes és a kettes, valamint a hármas és a négyes fogyasztó páronként egymással párhuzamosan lesz kapcsolva. Például az egyes és a négyes fogyasztón átfolyó áramok erősségének különbsége lesz a kapcsolón áthaladó áram erőssége.

Ekkor a főág eredő ellenállása a sorosan kapcsolt R_{12} és R_{34} ellenállások összege, ahol:

$$R_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{300\cdot200}{300+200}\,\text{k}\Omega=120\ \text{k}\Omega,\quad \text{és}\quad R_{3,4}=\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}=\frac{400\cdot100}{400+100}\,\text{k}\Omega=80\,\text{k}\Omega.$$

Így a főág eredő ellenállása: $R_e = R_{1,2} + R_{3,4}$ = 120 kΩ + 80 kΩ = 200 kΩ.

A főágban folyó áram erőssége tehát:

$$I=\frac{U}{R_e}=\frac{300\ \text{V}}{200\ \text{k}\Omega}=1{,}5\ \text{mA}.$$

Az egyes és a négyes számú fogyasztón átfolyó áram erőssége tehát:

$$I_1=\frac{I\cdot R_{1,2}}{R_1}=\frac{1{,}5\ \text{mA}\cdot120\ \text{k}\Omega}{300\ \text{k}\Omega}=0{,}6\ \text{mA}\quad \text{és}\quad I_4=\frac{I\cdot R_{3,4}}{R_4}=\frac{1{,}5\ \text{mA}\cdot80\ \text{k}\Omega}{100\ \text{k}\Omega}=1{,}2\ \text{mA}.$$

A K_1 kapcsolón áthaladó eredő áram erőssége:

$$I_{K_1} = I_4 - I_1 = 1,2 \text{ mA} - 0,6 \text{ mA} = 0,6 \text{ mA},$$

vagyis 2 másodperc alatt a K_1 kapcsolón

$$Q_{K_1} = I_{K_1} \Delta t = 0,6 \text{ mA} \cdot 2 \text{ s} = 1,2 \text{ mC}$$

töltés, azaz

$$N_{\text{elektron}_1} = \frac{Q_{K_1}}{e} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \text{C}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}} = \mathbf{7,5 \cdot 10^{15}}$$

számú elektron halad át, az ábrán **felfelé**.

b) A K_2 kapcsoló zárása után az egyes számú kondenzátor az egyes és kettes fogyasztóval, illetve a kettes számú kondenzátor a hármas és négyes fogyasztóval lesz párhuzamosan kapcsolva. Kellő idő elteltével kondenzátorok állandósult feszültsége az ellenállásokra jutó feszültséggel fog megegyezni.

A kondenzátorok „belső" lemezei az eredeti soros kapcsolásban csak megosztás útján töltődhettek fel. Így a kapcsoló zárása után kialakuló különböző abszolút értékű Q_1 és Q_2 töltések különbsége csak a K_2 kapcsolón keresztül juthatott a „belső" lemezek által alkotott rendszerre. Itt

$$Q_1 = C_1 U_{1,2} = C_1 I R_{1,2} = 40 \,\mu\text{F} \cdot 1,5 \,\text{mA} \cdot 120 \,\text{k}\Omega = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{C} = 7{,}2 \text{ mC},$$

és

$$Q_2 = C_2 U_{3,4} = C_2 I R_{3,4} = 10 \,\mu\text{F} \cdot 1,5 \,\text{mA} \cdot 80 \,\text{k}\Omega = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{C} = 1{,}2 \text{ mC}.$$

A kapcsolón átáramló töltések mennyisége tehát:

$$Q_{K_2} = Q_1 - Q_2 = 7,2 \text{ mC} - 1,2 \text{ mC} = 6 \text{ mC}.$$

A kapcsolón áthaladó elektronok száma:

$$N_{\text{elektron}_2} = \frac{Q_{K_2}}{e} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \text{C}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}} = \mathbf{3,75 \cdot 10^{16}.}$$

Az elektronok a kapcsolón itt is (az ábrán) **felfelé** haladnak át.

c) A K_1 kapcsolót nyitása után a kondenzátorok már csak az R_2 illetve R_3 ellenállással lesznek párhuzamosan kapcsolva. Az ellenállások arányának megfelelően U_2 = 100 V ill. U_3 = 200 V. Ezzel a kondenzátorok töltései:

$$Q_1' = C_1 U_2 = 40 \mu\text{F} \cdot 100 \text{ V} = 4 \text{mC}, \quad \text{és} \quad Q_2' = C_2 U_3 = 10 \mu\text{F} \cdot 200 \text{ V} = 2 \text{mC}.$$

A K_2 kapcsolón átáramló töltés

$$Q_{K_2}' = \left(Q_2' - Q_1'\right) + \left(Q_1 - Q_2\right) = 4 \text{ mC}.$$

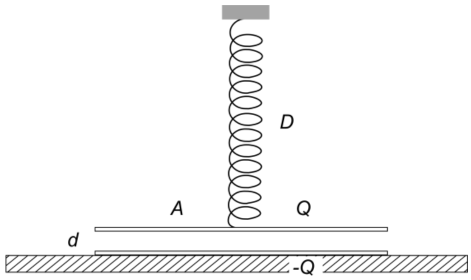
Az átáramló elektronok száma pedig:

$$N_{\text{elektron}_2}' = \frac{Q_{K_2}'}{e} = \mathbf{2,5 \cdot 10^{16}.}$$

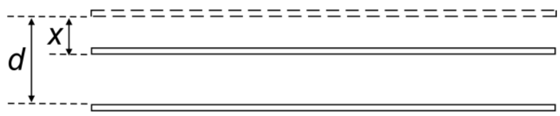
Az elektronok a kapcsolón (az ábrán) **felfelé** haladnak át.

4/B *Két azonos,* A = 1 dm^2 *területű fémlemez közül az egyiket vízszintes asztallapra helyezzük, a másikat felette egy* D = 6 N/m *direkciós erejű csavarrugón felfüggesztjük és nyugalmi állapotában szigetelő fogóval rögzítjük. Ekkor a két lemez egymástól* d = 2 cm *távolságban van. Ezután a rendszert mint kondenzátort* $Q = 8 \cdot 10^{-8}$ *C töltéssel feltöltjük, majd a felfüggesztett lemezt lökésmentesen elengedjük.*

a) Mekkora amplitúdójú rezgés jön létre?
b) Mekkora a lemez legnagyobb sebessége, ha tömege m = 10 g *?*
c) Mekkora a lemez legnagyobb gyorsulása?
d) Adjuk meg a rendszer elektrosztatikus energiáját az idő függvényében!
A közegellenállást ne vegyük tekintetbe!



Megoldás. Az állandó töltés miatt a lemezek közötti elektromos mező állandó marad, hasonlóképpen a gravitációs erőtér is. Feltöltés előtt a rugóra függesztett lemez egyensúlyban volt. Feltöltés után vonzóerő lépett fel az elektrosztatikus erők miatt, ha feloldjuk a rögzítést, a lemez gyorsulva elindul a másik lemez felé, közben a rugóerő egyre növekszik. Harmonikus rezgőmozgás alakul ki. A keletkező rezgés amplitúdója legyen *x!* Megfelelő adatok esetén nem ütközik össze a két lemez, hanem 2*x* távolság megtétele után visszafordul, és a rugó hatására ismét eléri kiinduló helyzetét. (Az energia-megmaradás miatt tovább nem emelkedhet.)



a) A rezgés szélső helyzetből indul, tehát a keresett amplitúdónyi út megtétele után a maximális pillanatnyi sebességgel, vagyis a lemez gyorsulásmentesen mozog. Ekkor a rá ható erők eredője zérus. Ezt felhasználva:

$$\sum F = F_{\mathrm{grav}} + F_{\mathrm{rug}} + F_{\mathrm{el}} = 0.$$

A gravitációs erő $F_{\mathrm{grav}} = mg$, a rugalmas erő ebben a pillanatban $F_{\mathrm{rug}} = D(\Delta l_0 + x)$, és az elektrosztatikus vonzóerő a lemezek közötti eredő térerősséggel kifejezve (a függvénytáblázatból):

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}QE.$$

(A képletben megérthető az ½-es faktor megjelenése, ugyanis a kiszemelt lemez töltéseire *önmaguk* nem hatnak, *csak a szemközti lemez terének* a lemezek közé eső része hat, ami pedig éppen a fele az *eredő* térerősségnek, hiszen az eredő *mindkét* lemez terének szuperpozíciójából áll elő. Más meggondolással: a kiszemelt lemez töltései valójában az *eredő* mezőben vannak, a lemez felületének vékony rétegében. A lemez szélén levő töltésekre valóban az eredő E térerősségű mező hat, azonban, mivel a fém többlettöltés nélküli *belsejében* 0 az elektromos térerősség, a réteg „legbelső” töltéseinél már 0-ra csökken az eredő tér. Így az átlagosan ható térerősség éppen a fele a lemezek közötti eredő térerősségnek.)

Ezt felhasználva az elektrosztatikus vonzóerőre valóban írhatjuk:

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}Q\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A} = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{A},$$

A rugó megnyúlása az egyensúlyi (indulási) helyzetig: $\Delta l_0 = \frac{mg}{D}$, amit a rugóerő fenti kifejezésébe írva:

$$F_{\mathrm{rug}} = D\left(\frac{mg}{D} + x\right) = mg + Dx.$$

Ezzel mozgásegyenletünk az egyensúlyra:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{A} + mg - (mg + Dx) = 0,$$

azaz

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{A} - Dx = 0,$$

innen a keresett amplitúdó:

$$x = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{AD} = \frac{64\cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}^2}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2\cdot 6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \mathbf{6{,}026\cdot 10^{-3}\,m} = \mathbf{6{,}03\,mm}.$$

Érdekes, hogy az eredmény független a lemez tömegéről és a lemezek kezdeti távolságától. (Nagyobb tömeg esetén nyílván nagyobb a rugó kezdeti megnyúlása.)

Látható, hogy a rezgés tágassága (kétszeres amplitúdója) csak $2x = 1{,}206$ cm < $d = 2$ cm, vagyis a lemezek nem ütköznek össze, így a rezgés valóban létrejöhet.

b) A lemez maximális sebessége a kinematikából így írható:

$$v_{\max} = A'\omega = x\omega,$$

ahol a körfrekvencia $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{10^{-2}\,\mathrm{kg}}} = 24{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, (a rezgésszám: $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{24{,}5}{2\cdot\pi} = 3{,}9\,\frac{1}{\mathrm{s}}$)

ezzel a maximális sebesség:

$$v_{\max} = 6{,}026\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 24{,}5\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \mathbf{0{,}148\,\frac{m}{s} = 15\,\frac{cm}{s}}.$$

c) A lemez legnagyobb gyorsulása:

$$a_{\max} = A'\omega^2 = 6{,}026\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 24{,}5^2\,\frac{1}{s^2} = \mathbf{3{,}62\,\frac{m}{s^2}}.$$

(Természetesen ezt megkaphatjuk a mozgásegyenletből az indulási szakaszra felírva:

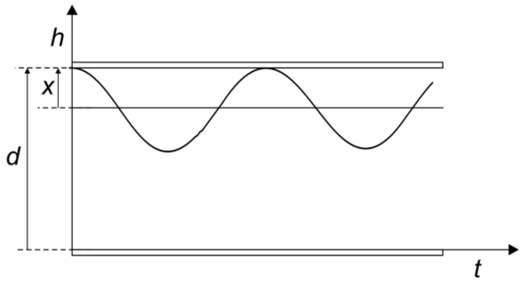
$$a_{\max} = \frac{\sum F}{m} = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{Am} = \frac{64\cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}^2}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}} = 3{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.)$$

d) A rendszer elektrosztatikus energiája az energiasűrűség és térfogat szorzata:

$$W_{\mathrm{el}} = \rho_{\mathrm{el}} V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A h,$$

ahol *h* a lemezek pillanatnyi távolsága. A rezgés (mivel szélső helyzetből indul) koszinuszos függvénye az időnek, a pillanatnyi magasság az egyensúlyi helyzettől való kitérés függvényében:

$$h = d - x + x\cos\omega t = d + x\left(\cos\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t - 1\right).$$



Ezzel a rendszer elektrosztatikai energiája az idő függvényében:

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A\left[d + x\left(\cos\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t - 1\right)\right] = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\left[d + x\left(\cos\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t - 1\right)\right],$$

számértékileg:

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{64\cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}^2}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2}\left[2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} + 6{,}026\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\left(\cos\sqrt{\frac{6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{10^{-2}\,\mathrm{kg}}}\cdot t - 1\right)\right] =$$

$$= 7{,}232\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} + 2{,}179\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}\cdot\cos\left(24{,}49\frac{1}{\mathrm{s}}t - 1\right).$$

(Érdekesség kedvéért az amplitúdó meghatározásának másik útja is lehet.

A maximális 2*x* süllyedés értékét az energia-megmaradásból is meghatározhatjuk. Jelöljük az energiákat *W*-vel! A rendszer konzervatív, vagyis az elektromos, a gravitációs és a rugalmas energiák megváltozásának összege zérus. (Ezzel egyenértékű: a munkatétel szerint az összes munkák összege a kinetikus energia megváltozásával egyenlő. A legmélyebb helyzetben és a kezdőhelyzetben 0 volt a sebesség, vagyis az összes munkák összege 0.)

$$\Delta W_{\mathrm{el}} + \Delta W_{\mathrm{grav}} + \Delta W_{\mathrm{rug}} = 0.$$

A kondenzátor elektrosztatikai energiája (mivel $d << \sqrt{A}$) az energiasűrűség és a térfogat szorzata, így ennek megváltozása:

$$\Delta W_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A 2x,$$

a gravitációs helyzeti energia megváltozása

$$\Delta W_{\mathrm{grav}} = -mg2x,$$

a rugalmas energia megváltozása:

$$\Delta W_{\text{rug}} = W_{\text{rug2}} - W_{\text{rug1}} = \frac{1}{2}D\left(\Delta l_0 + 2x\right)^2 - \frac{1}{2}D\left(\Delta l_0\right)^2 = \frac{1}{2}D\left(2\Delta l_0 2x + 4x^2\right).$$

A kezdeti rugómegnyúlás a lemez tömegével kifejezhető:

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{D},$$

amit a rugalmas energiaváltozásba írva:

$$\Delta W_{\text{rug}} = \frac{1}{2}D\left(2\frac{mg}{D}2x + 4x^2\right) = mg2x + \frac{D4x^2}{2} = mg2x + D2x^2.$$

Energia-egyenletünk ezekkel:

$$\sum \Delta W = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A2x - mg2x + mg2x + D2x^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A2x + D2x^2 = 0.$$

Egyszerűsítés után:

$$D2x - \varepsilon_0 E^2 A = 0$$

Vegyük figyelembe, hogy a lemezek között kialakult (állandó) térerősség a töltéssel így fejezhető ki:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}.$$

Ezt egyenletünkbe írva:

$$D2x - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{A} = 0.$$

$$2x = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{DA} = \frac{64\cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}^2}{8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\cdot 6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2} = 12{,}052\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

A létrejövő amplitúdó tehát: $x = \mathbf{6{,}026\cdot 10^{-3}\,m} = \mathbf{6{,}026\,mm}.$

Ez megegyezik előző eredményünkkel.)