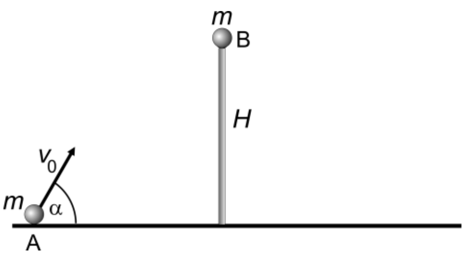
A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA

I. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

1.) Egy *m* tömegű, a talajon egy oszlop aljától d = 5 m-re nyugvó, kisméretű **A** golyónak v_0 = 12 m/s sebességet adva úgy találjuk el a *H* magas, vékony oszlop tetején nyugvó, szintén *m* tömegű, azonos méretű **B** golyót, hogy azzal vízszintes irányú sebességgel centrálisan, egyenesen ütközik. Az ütközés tökéletesen rugalmas.



a) Milyen magas lehet az oszlop?

b) Milyen távol lesznek egymástól az eső golyók, amikor a meglökött **B** golyó a talajt *H*/2-re megközelítette?

c) Minimálisan mekkora sebességet kell adnunk az **A** golyónak, hogy az adott *d* mellett a folyamat így végbemenjen? Ebben az esetben milyen magas az oszlop, és milyen irányban kell indítani az **A** golyót?

I. Megoldás. Az **A** golyó pályája olyan parabola, amelynek csúcspontja éppen a **B** golyó (tömegközéppontjának) magasságában van, ui. ott vízszintes a pálya érintője. A ferde hajítás összefüggéseiből meghatározható a hajítás kezdősebességének iránya, majd ebből az oszlop magassága (a golyók sugarai a feladatszöveg szerint elhanyagolhatóak).

A két, azonos tömegű golyó abszolút rugalmas ütközése következtében „sebességet cserél", azaz az **A** golyó megáll, és ettől kezdve szabadon esik (a vékony oszlop nem befolyásolja az **A** golyó szabadesését), a **B** golyó pedig az **A** golyó vízszintes sebességével kezdi meg vízszintes hajítási pályáját. Ezért egyszerre érnek talajt. A két golyó pályáit „összeolvasztva" egyetlen golyó ferdehajítási pályáját kapjuk, vagyis a **B** golyó úgy folytatja útját, mintha **A** golyó lenne, és nem ütközött volna semmivel (a **B** golyó pályája tükörképe az **A** golyóénak.) Az **A** golyó az oszlop tövébe esik, a **B** golyótól tehát fél hajítástávolságra van leérkezéskor.

a) A ferde hajítás szöge a hajítás adott fél távolságából kapható:

$$d = \frac{s_{\text{xmax}}}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad \rightarrow \ \sin 2\alpha = \frac{2gd}{v_0^2} \quad .$$

Figyelembe véve, hogy egy szinusz-értékhez két, a feladatunknak megfelelő szög tartozik: α_1 és $\alpha_2 = 180^{\circ} - \alpha_1$. Így az egyiket kiszámolva könnyen adódik a másik megoldás. Alkalmazva ezt 2α-ra:

$$2\alpha_2 = 180° - 2\alpha_1 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 90° - \alpha_1.$$

Ezzel a feladatnak megfelelő két hajítási irány:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2gd}{v_0^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 5\text{ m}}{144\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 22°,$$

és
$$\alpha_2 = 90° - \alpha_1 = 90° - 22° = 68°.$$

Így nemcsak két hajítás irány, hanem két oszlop-magasság is adódik.

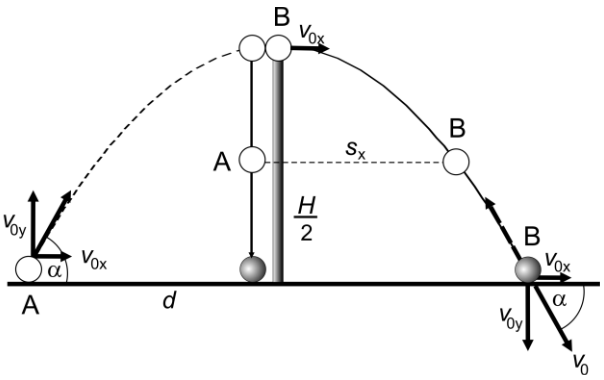
Az oszlop magassága a hajítás magasságával egyenlő:

$$H_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_1}{2g} = \frac{144\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\sin^2 22°}{2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx \mathbf{1\,m,}$$

és

$$H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_2}{2g} = \frac{144\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\sin^2 68°}{2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx \mathbf{6{,}2\,m,}$$

b) Az ütközést követően az **A** és **B** golyók függőleges irányú kezdősebességei egyaránt zérusok, és gyorsulásuk egyaránt *g*, így minden pillanatban azonos szinten vannak. Az **A** golyó pályája függőleges egyenes, a B golyóé parabolaív. A fél magasság megtételéig eltelt idő:



$$t_1 = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{H_1}{2}}{g}} = \sqrt{\frac{1\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 0{,}32\text{ s.} \qquad \text{és} \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{H_2}{2}}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}2\text{ m}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 0{,}79\text{ s.}$$

Ezalatt a **B** golyó az **A** golyótól a két esetben

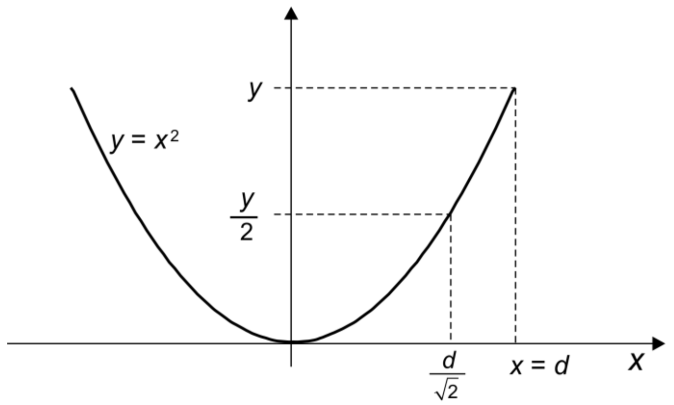
$$s_{x1} = v_{0x}t_1 = v_0\cos\alpha_1\cdot t_1 = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cos 22°\cdot 0{,}32\text{ s} \approx \mathbf{3{,}5\,m}$$

és

$$s_{x2} = v_{0x}t_1 = v_0\cos\alpha_2\cdot t_2 = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cos 68°\cdot 0{,}79\text{ s} \approx \mathbf{3{,}5\,m},$$

tehát ugyanolyan távolra kerül.

Eredményünk nem véletlen, ugyanis az $y = x^2$ parabola tulajdonságából következik, hogy az $\frac{y}{2}$ értéket az $\frac{x}{\sqrt{2}}$ helyen veszi fel, azaz $s_{x2} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{5\text{ m}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5\text{ m}$.



(Ez a kapcsolat az orrával felfelé álló parabola esetén is fennáll!)

c) Most a követelmény változatlanul az, hogy az **A** golyó az oszlop tetején nyugvó, **B** golyóval vízszintes irányú sebességgel centrálisan, egyenesen ütközzön változatlan d = 5 m oszloptávolság esetén, kiegészítve azzal az új követelménnyel, hogy a kezdősebesség a lehető legkisebb legyen, amely mellett az első követelmény is teljesül. Természetesen az oszlop-magasság eltérő lesz az *a)* kérdésben meghatározandó magasságtól.
Az új oszlopmagasság a hajítás szögével és kezdősebességével kifejezve:

$$H' = \frac{v_{0\min}^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

a hajítás fél-távolsága általában:

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Innen

$$v_0^2 = \frac{2gd}{\sin 2\alpha}$$

A kezdősebesség a legkisebb, ha a nevező a legnagyobb, vagyis $\sin 2\alpha \le 1$ miatt éppen 1, tehát $2\alpha = 90°$, és így $\alpha = \mathbf{45°.}$

Ezzel:

$$v_{0\min} = \sqrt{2gd} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\text{ m}} = \mathbf{10\frac{m}{s}.}$$

Végül az oszlop magassága ebben az esetben:

$$H' = \frac{v_{0\min}^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin^2 45°}{2 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \mathbf{2{,}5\,m.}$$

(Ebben az esetben a 45°-os szögű hajítás miatt természetesen csak egyetlen *H'* magasságot kapunk.)

II. Megoldás. A feladat megoldásához nem szükséges a ferde hajítás összefüggéseit ismerni, elegendő a *vízszintes hajítás* leírásának ismerete.

a) Induljunk ki a jelenség közepétől, vagyis amikor a **B** golyó megkezdi vízszintes hajítását! Kezdősebessége megegyezik az **A** golyó sebességének vízszintes komponensével, tehát v_{0x} –szel (hiszen **A**-ra vízszintes irányú erő az ütközésig nem hat, és ütközéskor a lendület- és energia-megmaradás miatt sebességet cserélnek).
Az eső **B** golyónak el kell jutnia d távolságra, mire a talajra ér, tehát érvényes:

$$v_{0x} = \frac{d}{t}. \tag{1}$$

A d távolságot annyi idő alatt kell megtennie, míg 0 függőleges irányú kezdősebességgel függőleges, g gyorsulással esve megteszi a H távolságot a talajig, azaz:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{2}$$

Ezzel a **B** golyó ütközés utáni vízszintes kezdősebessége (1) és (2)-ből:

$$v_{0x} = d\sqrt{\frac{g}{2H}}. \tag{3}$$

A golyó végsebességének y komponense talajtéréskor:

$$v_{0y} = \sqrt{2gH}. \tag{4}$$

A két sebességkomponens négyzetösszege a **B** golyó végsebességének négyzetével egyelő, ami az energia megmaradása miatt az **A** golyó kezdősebességével megegyezik, $\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2\right)$, tehát (3) és (4) felhasználásával:

$$v_0^2 = d^2\,\frac{g}{2H} + 2gH$$

Az oszlopmagasságra rendezve:

$$2v_0^2 H = d^2 g + 4gH^2 \quad \rightarrow \quad 4gH^2 - 2v_0^2 H + d^2 g = 0.$$

Innen az oszlopmagasság:

$$H_{1,2} = \frac{2v_0^2 \pm \sqrt{4v_0^4 - 16d^2 g^2}}{8g} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 4d^2 g^2}}{4g}.$$

Esetünkben mindkét gyök fizikailag megvalósuló esetet jelent:

Numerikusan:

$$H_{1,2} = \frac{12^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \pm \sqrt{12^4\,\frac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^4} - 4\cdot 25\mathrm{m}^2\cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}}}{4\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \approx \begin{matrix}\mathbf{6,2\,m}\\ \mathbf{1,0\,m}\end{matrix}.$$

b) Lásd az I. megoldást!

c) Hajítsuk el vízszintesen ismeretlen nagyságú sebességgel az ismeretlen *H'* magasságú oszlop tetejéről a **B** golyót úgy, hogy az oszlop aljától *d* = 5 méter távolságban érjen talajt! Tegyük ezt úgy, hogy a leérkező golyó végsebessége minimális legyen!

A vízszintes irányú mozgásra: $v_0 \cos\alpha \cdot t = d,$

a függőleges irányú mozgásra: $v_0 \sin\alpha = gt,$

innen a mozgás ideje: $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}.$

Ezzel $v_0 \cos\alpha \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = d.$

Az ismert trigonometriai összefüggés szerint (2sinαcosα = sin2α) ez így írható:

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = d.$$

Innen a keresett kezdősebesség-minimum:

$$v_0^2 = \frac{2gd}{\sin 2\alpha}.$$

A kezdősebesség a legkisebb, ha négyzete is az. A számláló konstans, a tört akkor legkisebb, ha nevezője legnagyobb, azaz amikor a $\sin 2\alpha \le 1$ egyenlőtlenség bal oldala a legnagyobb értéket veszi fel. A szinusz függvény maximuma 1, vagyis 2α = 90°, azaz a beérkező **B** golyó sebessége a vízszintessel α = 45°-os szöget zár be. Ha gondolatban visszafelé játsszuk le a folyamat filmjét, akkor láthatjuk, hagy az **A** golyó kezdősebessége is

α = 45° -os

szöget zár be a vízszintessel, és így a minimális kezdősebesség:

$$v_{0\min} = \sqrt{2gd} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\ \mathrm{m}} = \mathbf{10\,\frac{m}{s}}.$$

Milyen hosszú oszlopra kell helyezni a **B** golyót? A függőleges mozgásra érvényes:

$$H' = \frac{v_{0y\min}^2}{2g} = \frac{v_{0\min}^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{100 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \sin^2 45°}{2 \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{2{,}5\,m.}$$

2.) Vízszintes, súrlódásmentes asztallapon fekszik egy D átmérőjű, M tömegű korong. A közepén egy kicsi, m tömegű test nyugszik. A test és a korong közötti csúszási súrlódási együttható μ.

a) Legalább mekkora vízszintes irányú v sebességgel kell a korongot hirtelen elindítani, hogy kicsússzon a test alól?

b) Mekkora lesz a test és a korong sebessége, amikor már közös sebességgel mozognak, illetve a korong éppen kicsúszik a test alól, ha a korongot v_1, illetve v_2 sebességgel indítjuk?

Adatok: D = 0,5 m, M = 0,5 kg, m = 0,1 kg, μ = 0,3, v_1 = 1,2 m/s, v_2 = 2 m/s.

I. Megoldás: *a)* A testre és a korongra is vízszintes irányban csak a köztük fellépő csúszási súrlódási erő hat. Newton II. törvényét alkalmazva, meghatározzuk a test és a korong gyorsulását:

A korongé: $A = \mu \cdot \frac{m}{M} \cdot g = 0{,}6 \text{ m/s}^2$, a testé: $a = \mu \cdot g = 3 \text{ m/s}^2$.

A korong akkor csúszik ki a test alól, ha az általa megtett út legalább $D/2$-vel nagyobb a test által megtett útnál:

$$\left(vt - \frac{A}{2}t^2\right) - \frac{a}{2}t^2 \geq \frac{D}{2} \quad .$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$(A+a)t^2 - 2vt + D = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva, a t időre két érték adódik:

$$t_1 = \frac{2v - \sqrt{(2v)^2 - 4(A+a)D}}{2(A+a)}, \qquad t_2 = \frac{2v + \sqrt{(2v)^2 - 4(A+a)D}}{2(A+a)}$$

A kicsi test a t_1-kor elhagyja a korongot. (A t_2 időpillanatban a test visszatérne a korongra, ha a testek gyorsulásai nem változnának nullára.)
Ez a két időpont természetesen csak akkor van (akár azonos értékkel), ha a gyök alatti kifejezés nem negatív.

$$(2v)^2 - 4(A+a)D \geq 0$$

$$v \geq \sqrt{(A+a)D} = \mathbf{1{,}34\ \frac{m}{s}}.$$

b) Mivel $v_1 < v$, a test nem fog lecsúszni a korongról.
A két test közös v_k sebességére igaz

$$v_k = v_1 - A \cdot t\,, \tag{1}$$

$$v_k = a \cdot t \tag{2}$$

A (2) egyenletből t-t kifejezve, majd (1) egyenletbe helyettesítve:

$$v_k = v_1 - A \cdot \frac{v_k}{a} \quad \rightarrow \quad v_k = \frac{a}{A+a} v_1 = \frac{5}{6} v_1 = 1 \text{ m/s}$$

Mivel $v_2 < v$, a test lecsúszik a korongról. A test és a korong kölcsönhatásának ideje:

$$t = t_1 = 0{,}143\,\mathrm{s}$$

A korong sebessége $u_1 = v_2 - A\cdot t = \mathbf{1{,}914\,\frac{m}{s}}$, a test sebessége: $u_2 = a\cdot t = \mathbf{0{,}43\,\frac{m}{s}}$.

II. Megoldás: *a)* Határesetben a kis test és a korong úgy ér el közös sebességet, hogy a kis test eljut a korong szélére. Ebben az esetben a lendület megmaradása alapján felírhatjuk a közös *u* sebességet:

$$Mv = (M+m)u \quad \to \quad u = \frac{Mv}{(M+m)}.$$

A munkatétel alapján belátható, hogy a rendszer mozgási energia csökkenésének nagysága éppen a súrlódási munkával (súrlódási hővel) egyenlő, ami határesetben így írható fel:

$$W_s = \mu mg\frac{D}{2} = 0{,}075\ \mathrm{J}.$$

Írjuk fel a mozgási energia csökkenését, amiből a kritikus v sebesség kiszámítható:

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)u^2 = W_s \quad \to \quad \frac{Mmv^2}{2(M+m)} = W_s \quad \to \quad v = \sqrt{\frac{2(M+m)W_s}{Mm}} = \mathbf{1{,}34\,\frac{m}{s}}.$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a kis test akkor csúszik le a korongról, ha legalább v sebességgel lökjük meg a korongot.

b) Ha a korongot csak $v_1 < v$ sebességgel indítjuk, akkor a kis test nem csúszik le róla, ezért közös sebességet érnek el, amit a lendület-megmaradás alapján közvetlenül kiszámíthatunk:

$$v_k = \frac{Mv_1}{M+m} = \mathbf{1\,\frac{m}{s}}.$$

Ha $v_2 > v$ sebességgel indítjuk a korongot, akkor a kis test lecsúszik róla. A lecsúszás pillanatában jelöljük a korong sebességét u_1-gyel, a kis testét u_2-vel. Ebben az esetben is ugyanakkora lesz a súrlódási munka, mint az *a)* részben:

$$W_s = \mu mg\frac{D}{2} = 0{,}075\ \mathrm{J}.$$

Írjuk fel a lendület-megmaradás tételét és a munkatételt:

$$Mv_2 = Mu_1 + mu_2$$

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mu_1^2 - \frac{1}{2}mu_2^2 = W_s.$$

Kétismeretlenes egyenletrendszerre jutottunk. Fejezzük ki az első egyenletből u_2-t, majd írjuk be a második egyenletbe:

$$u_2 = \frac{M(v_2 - u_1)}{m}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mu_1^2 - \frac{1}{2}\frac{M^2(v_2-u_1)^2}{m} = W_s.$$

Így másodfokú, egyismeretlenes egyenletet kaptunk u_2-re:

$$\left(\frac{M+m}{m}\right)u_1^2-\left(\frac{2Mv_2}{m}\right)u_1+\left(\frac{2W_s}{M}+\frac{(M-m)v_2^2}{m}\right)=0.$$

amiből az u_1 sebességet a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján kiszámíthatjuk.

$$\left(\frac{0,5+0,1}{0,1}\right)u_1^2-\left(\frac{2\cdot 0,5\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0,1}\right)u_1+\left(\frac{2\cdot 0,075\ \mathrm{J}}{0,5\ \mathrm{kg}}+\frac{(0,5-0,1)4\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{0,1}\right)=0.$$

Rendezve:

$$6u_1^2-20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,u_1+16,3\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}=0.$$

Megoldása:

$$u_1=\frac{20\pm\sqrt{400-4\cdot 6\cdot 16,3}}{12}=\begin{cases}1,914\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=u_{11}\\ 1,42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=u_{12}\end{cases}$$

Két pozitív gyököt kapunk (1,91 m/s és 1,42 m/s), amelyek segítségével az

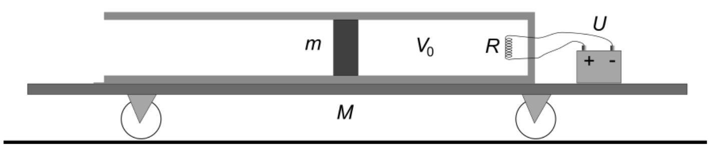
$$u_2=\frac{M(v_2-u_1)}{m}$$

$$u_{21}=\frac{M(v_2-u_{11})}{m}=\frac{0,5\left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}-1,914\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{0,1}=0,43\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$\text{ill.}\quad u_{22}=\frac{M(v_2-u_{12})}{m}=\frac{0,5\left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}-1,42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{0,1}=2,9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességre rendre 0,45 m/s és 2,9 m/s sebességeket kapunk a kis testre. Fizikailag nem lehetséges, hogy a kis test nagyobb sebességre tegyen szert, mint amekkorával a korongot meglöktük (v_2 = 2 m/s), tehát csak az első gyökök értelmesek. Így megállapíthatjuk, hogy ebben az esetben a korong, illetve a kis test állandósult sebessége u_1 = **1,91 m/s** és u_2 = **0,43 m/s** lesz.

3.) Könnyen gördülő kiskocsin rögzített A = 1 dm^2 keresztmetszetű hengerben az m = 2 kg tömegű könnyen mozgó dugattyú V_0 = 5 liter térfogatú levegőt zár el. Mind a henger, mind a dugattyú hőszigetelő. Az elzárt gáz hőmérséklete T = 300 K, a külső légnyomás p_0 = 10^{5}Pa. A kiskocsin U = 40 V feszültségű akkumulátor is van, amely a hengerben lévő fűtőszálhoz kapcsolódik. A kiskocsi tömege a hengerrel és az akkumulátorral együtt M = 3 kg. A fűtőszál ellenállása R = 20 Ω. A fűtőszálat t = 30 s-ig tartjuk bekapcsolva. Mennyit mozdul el ezalatt a kiskocsi?



Megoldás. A folyamat izobár. A bezárt gáz hőmérséklete növekszik, nyomása infinitezimálisan való növekedése miatt tágul, nyomását mindvégig a külső nyomás közvetlen közelében tartva. A dugattyú elmozdul balra, a kiskocsinak jobbra kell elmozdulnia, hiszen külső erők híján a tömegközéppontnak helyben kell maradnia. Meghatározandó a gáz (térfogati) tágulása, majd ebből a dugattyú elmozdulása a hengerhez képest, majd a talajhoz viszonyítva.

A hőszigetelés miatt a fűtőszál által leadott energiát teljes egészében a bezárt gáz veszi fel. (A dugattyú és a henger hőszigetelése miatt nem vesz fel hőt.) A gáz által 30 másodperc alatt felvett hő:

$$Q = Pt = \frac{U^2}{R}t = \frac{40^2\,\mathrm{V}^2}{20\ \Omega}\cdot 30\ \mathrm{s} = 2400\mathrm{J}.$$

Az I. főtétel szerint: $\Delta E = Q - W_{\text{gáz}}$,

ahonnan a gáz munkája: $W_{\text{gáz}} = Q - \Delta E$,

ahol az izobár tágulás miatt $W_{\text{gáz}} = p\Delta V$, és a belső energia változása $\Delta E = \frac{f}{2}p\Delta V$.

Ezeket beírva az előző egyenletbe:

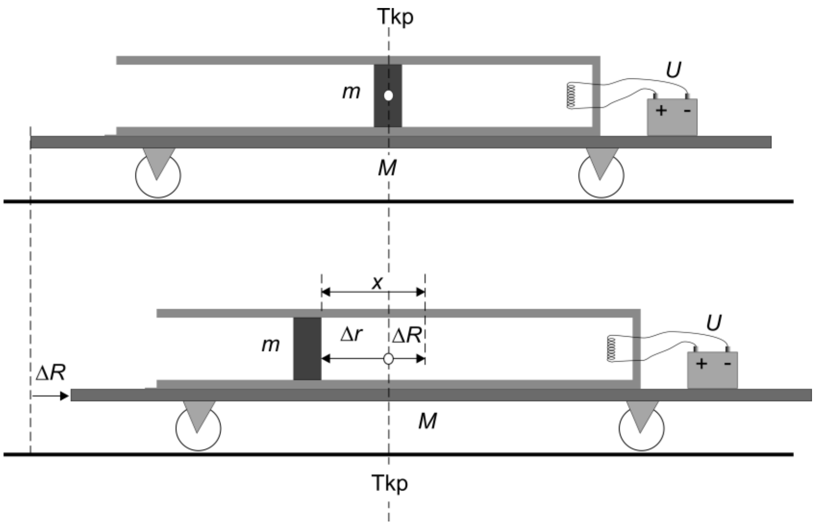
$$p\Delta V = Q - \frac{f}{2}p\Delta V \quad \rightarrow \; Q = \frac{f+2}{2}p\Delta V.$$

Innen a gáz térfogatváltozása esetünkben (levegőre f = 5-öt véve):

$$\Delta V = \frac{2Q}{\left(f+2\right)p_0} = \frac{2\cdot 2400\ \mathrm{J}}{\left(5+2\right)\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = 6.86\cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3 = 6.86\ \mathrm{dm}^3.$$

A dugattyúnak a hengerhez viszonyított x elmozdulása a $\Delta V = Ax$ összefüggés alapján:

$$x = \frac{\Delta V}{A} = \frac{6{,}86\ \mathrm{dm}^3}{1\ \mathrm{dm}^2} = 6{,}86\ \mathrm{dm}.$$



(Az ábrán a lényeget nem érintve az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy a rendszer tömegeloszlása éppen olyan, hogy a tömegközéppont a dugattyú kezdeti helyzetében van.)

Egyrészt az ábra szerint

$$\Delta r + \Delta R = x, \qquad (1)$$

másrészt a tömegközéppont helyben maradása miatt

$$m\Delta r = M\Delta R, \qquad (2)$$

ahol Δr és ΔR a dugattyú, illetve a kocsi elmozdulása.

(2)-ből $$\Delta r = \frac{M}{m}\Delta R,$$

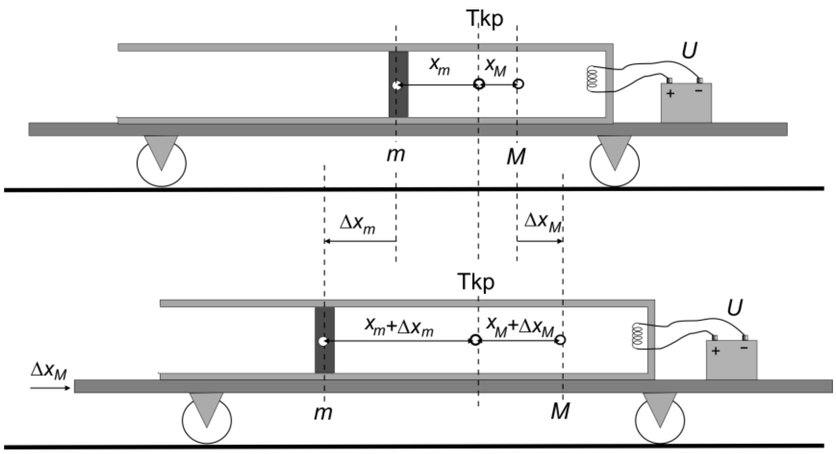
amit (1)-be írva kapjuk:

$$\frac{M}{m}\Delta R + \Delta R = x,$$

ahonnan a kocsi 30 s alatti elmozdulása:

$$\frac{M+m}{m}\Delta R = x \quad \rightarrow \quad \Delta R = \frac{m}{M+m}x = \frac{2\ \text{kg}}{3\ \text{kg} + 2\ \text{kg}} \cdot 6{,}86\ \text{dm} \approx \mathbf{2{,}74\,dm.}$$

Megjegyzés. Ha nem tételezzük fel egyszerűség kedvéért, hogy a rendszer tömegközéppontja éppen a dugattyú kezdeti helyén van, a következő gondolatmenettel juthatunk el eredményünkhöz. Tekintsük az alábbi ábrát! (Δx_M jelenti most a kocsinak a tömegközépponthoz, tehát a talajhoz viszonyított keresett elmozdulását.)



A dugattyú és a kocsi tömegközéppontjának a rendszer tömegközéppontjától való eredeti távolságaira érvényes:

$$mx_m = Mx_M \qquad (1)$$

Hasonló kapcsolat áll fenn a végállapotban is, ahol az új távolságok az eredeti távolságok és az elmozdulások összegeként felírhatók:

$$m\left(x_m + \Delta x_m\right) = M\left(x_M + \Delta x_M\right). \qquad (2)$$

Felhasználva, hogy $$\Delta x_m + \Delta x_M = \frac{\Delta V}{A},$$

azaz $$\Delta x_m = \frac{\Delta V}{A} - \Delta x_M, \qquad (3)$$

a dugattyú elmozdulása kiejthető, marad a keresett kocsi-elmozdulás. (3)-at (2)-be írva:

$$m\left(x_m+\frac{\Delta V}{A}-\Delta x_M\right)=M\left(x_M+\Delta x_M\right),$$

azaz

$$mx_m+m\frac{\Delta V}{A}-m\Delta x_M=Mx_M+M\,\Delta x_M,$$

figyelembe véve (1)-et:

$$m\frac{\Delta V}{A}-m\Delta x_M=M\,\Delta x_M,$$

azaz a kocsi keresett elmozdulása:

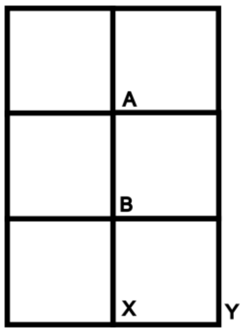
$$\Delta x_M\left(m+M\right)=m\frac{\Delta V}{A}\qquad\rightarrow\qquad\Delta x_M=\frac{m}{\left(m+M\right)}\frac{\Delta V}{A}=\frac{2\text{ kg}}{2\text{ kg}+3\text{ kg}}\frac{6{,}86\text{ dm}^3}{1\text{ dm2}}=2{,}74\text{ dm.}$$

4.) Az ábrán egy elektromos hálózat látható, amely 17 azonos vezető szakaszból áll. Ezek a szakaszok mind 1 Ω ellenállásúak.

a) Mekkora feszültséget kell az **AB** pontokra kapcsolnunk, hogy az **XY** pontok között 1 A erősségű áram folyjon?

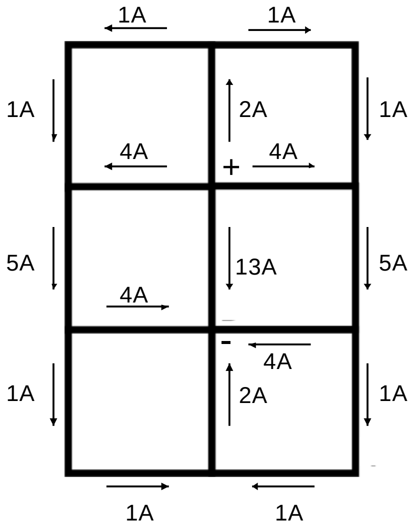
b) Hogyan változik meg az **XY** pontok között folyó áram erőssége, ha az **AB** pontok közötti vezető szakaszt eltávolítjuk, majd ugyanakkora feszültséget kapcsolunk az **AB** pontokra, mint az előző esetben?

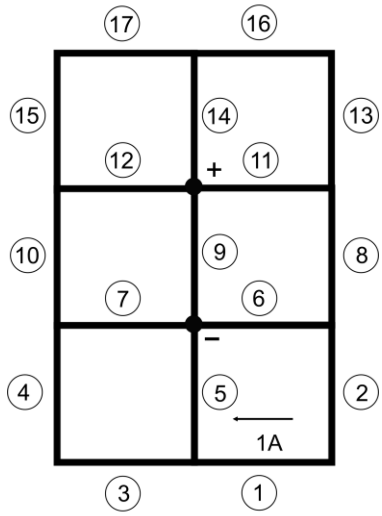
c) Mekkora teljesítményt ad le a feszültségforrás a vizsgált két esetben?



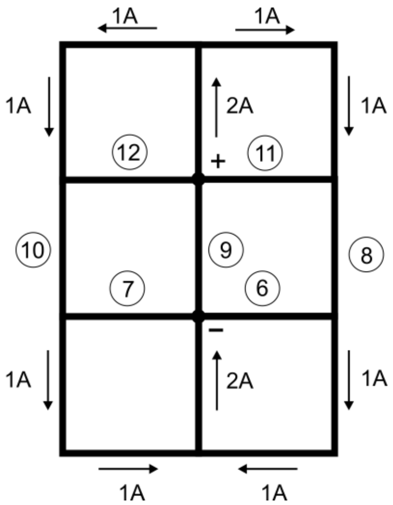
Megoldás:

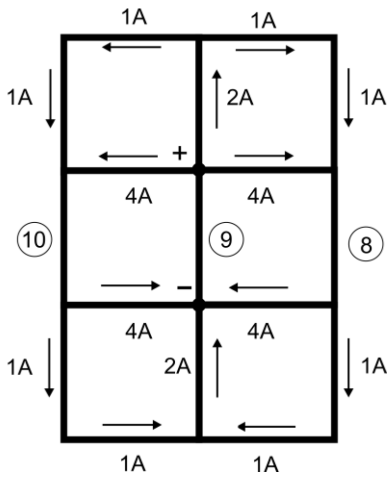
Az Ohm-törvény és a töltésmegmaradás törvényének ismételt alkalmazásával, valamint az áramkörben felismerhető szimmetriák kihasználásával az egyes ellenállásokon átfolyó áramok erőssége lépésről lépésre kiszámítható, a végeredményt az első ábra mutatja:





A részletezett számítás a következő módon történhet. Az ábrán az egyes ellenállásokat a könnyebb áttekinthetőség érdekében megszámozzuk. Szimmetria okok miatt nemcsak az 1-es ellenálláson folyik 1 A áram, hanem a 2-es, 3-as, 4-es, 13-as, 16-os, 17-es és 15-ös ellenállásokon is. Ezek az áramok a töltésmegmaradás törvénye szerint egyesülnek, így az 5-ös és a 14-es ellenálláson 2-2 A áram folyik, ahogy ezt a következő ábra mutatja. Az áramkör négy sarkában lévő négy hurok 3-3 ismert áramú ellenállására alkalmazhatjuk az Ohm-törvényt, így megkaphatjuk a rájuk eső feszültségeket, ami azért célszerű, mert így kiszámíthatjuk a 6-os, 7-es, 11-es és 12-es ellenállásokra eső feszültséget. Minden ellenálláson annyi a feszültség, ahány amper áram folyik az ellenálláson, mert az ellenállások 1 Ω-osak. Tehát a kérdéses ellenállásokra 2 + 1 + 1 = 4 V esik, ezeken 4 A áram folyik át.





A számításnak ezt az állapotát az utolsó ábra mutatja. Most újra a töltésmegmaradás törvénye alapján határozhatjuk meg a 8-as és a 10-es ellenállásokon átfolyó áramokat. Ezek 1 + 4 = 5 A értékűek. Végül újra az Ohm-törvény alkalmazásával a feszültségek kiszámítása következik, mert így megkaphatjuk a 9-es jelű ellenállás feszültségét (és áramát is). Így tehát az **A** és **B** pontok közötti feszültség 4 + 5 + 4 = 13 V, tehát a 9-es ellenálláson 13 A áram folyik.

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy ahhoz, hogy az 1-es jelű ellenálláson 1 A áram folyjon át, az **A** és **B** pontok közé 13 V feszültséget kell kapcsolnunk, és ezeken a pontokon a bemenő és kijövő áramerősségek értéke 4 + 2 + 4 + 13 = 23 A, vagyis az áramkör eredő ellenállása 13/23 Ω.

Adjuk meg a feladatban található részkérdésekre a választ:

a) Az **A** és **B** pontok közötti feszültség **13 V**.

b) Az **A** és **B** pontok közötti ellenállást és az áramkör többi részét úgy tekinthetjük, hogy ezek egymáshoz képest párhuzamosan vannak kapcsolva. Ennek megfelelően, ha kivesszük az **A** és **B** pontok közötti ellenállást, akkor az áramkör többi részén semmilyen **változás nem történik**, tehát az **X** és **Y** pontok között továbbra is 1 A áram folyik.

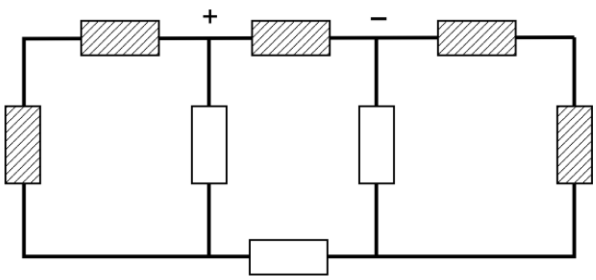
c) Az első esetben a feszültségforrás árama 23 A, így a leadott teljesítmény

$$P = (13\text{ V}) \cdot (23\text{ A}) = \mathbf{299\ W}.$$

A második esetben a telep árama csak 10 A, vagyis ekkor a telep teljesítménye: $P = (13\text{ V}) \cdot (10\text{ A}) =$ **130 W**.

Megjegyzés: Ha az **AB** egyenes mentén „kettéhajtjuk” az áramkört, akkor viszonylag könnyen átrajzolhatjuk úgy, hogy egy egyszerűbb, könnyebben kezelhető áramkört kell vizsgálnunk. Ekkor az egymásra kerülő ellenállások párhuzamosan vannak kapcsolva, tehát ezek 1/2 Ω ellenállásúak, de ha ezekből kettő sorosan helyezkedik el, akkor megint csak 1 Ω-ot kapunk.

Elvégezve a „kettéhajtást” és végrehajtva a fenti megfontolásokat, a következő áramkörhöz jutunk:



Az ábrán a satírozott ellenállások 1 Ω-ot jelentenek, míg az üres ellenállások 1/2 Ω-ot. A feladatban megadott 1 A áram az **XY** pontok között azt eredményezi, hogy az ábra jobb és bal oldalán lévő 2-2 ohmos ellenállásokon 2-2 amper áram folyik, tehát ezekre összesen 4 V feszültség esik. Ez azt eredményezi, hogy a „függőlegesen álló” 1/2 Ω-os ellenállásokra is 4 V esik, vagyis rajtuk 8 A áram folyik. Ez csak úgy lehet, hogy az alsó-középső 1/2 Ω-os ellenálláson az áram (2 A + 8 A) = 10 A (a töltésmegmaradás törvénye szerint), tehát az erre eső feszültség 5 V. Így már láthatjuk, hogy a + és – pontokra (4 V + 5 V + 4 V) = **13 V**-ot kell kapcsolnunk.

Értékelési útmutató:

1. feladat.

Az I. megoldást követők dolgozatának pontozása

a) Annak felismerése, hogy az **A** és **B** golyó sebességet cserél:	2 pont
A ferde hajítás mindkét szögének meghatározása 1 + 1 pont, összesen:	2 pont
Az oszlop kétféle magasságának meghatározása 1 + 1 pont, összesen:	2 pont
b) Annak felismerése, hogy hogyan mozog ütközés után a két golyó:	3 pont
A fél-magasság megtételéhez szükséges idő meghatározása:	2 pont
A két golyó egymástól való távolságának kiszámítása:	2 pont
c) Az új, minimális kezdősebesség meghatározása:	3 pont
A hajítás hajlásszögének meghatározása:	2 pont
Az új oszlopmagasság meghatározása:	2 pont
	Összesen: 20 pont

A II. megoldást követők dolgozatának pontozása

a) Annak felismerése, hogy az ütközés utáni folyamat vízszintes hajítás:	2 pont
A **B** golyó kezdősebességének meghatározása:	2 pont
A keresett oszlopmagasság kifejezése az adatokkal:	1 pont
Az oszlopmagasság numerikus meghatározása 1 + 1 pont, összesen:	2 pont
b) Annak felismerése, hogy hogyan mozog ütközés után a két golyó:	3 pont
A fél-magasság megtételéhez szükséges idő meghatározása:	2 pont
A két golyó egymástól való távolságának kiszámítása:	2 pont
c) A **B** golyó új kezdősebességének felírása a követelmény szerint:	2 pont
A minimalizálás módjának felismerése és felírása:	1 pont
Az új hajítási irány szögének meghatározása:	1 pont
Az új oszlopmagasság meghatározása:	2 pont
	Összesen: 20 pont

2. feladat.

Az I. megoldást követők dolgozatának pontozása

a) Annak felismerése, hogy akkor csúszik ki a korong a test alól, ha az általa megtett út legalább D/2-vel nagyobb a test által megtett útnál:	2 pont
A korong gyorsulásának megállapítása:	2 pont
A test gyorsulásának megállapítása:	2 pont
A két test kölcsönhatásának idejét megadó másodfokú egyenlet felírása:	2 pont
A másodfokú egyenlet vizsgálata:	2 pont
A keresett v sebesség meghatározása:	2 pont
b) Annak megállapítása, hogy v_1 sebesség esetén a test nem fog lecsúszni a korongról:	2 pont
A v_k közös sebesség meghatározása:	2 pont
Annak megállapítása, hogy v_2 sebesség esetén a test le fog csúszni a korongról:	2 pont
A korong és a test sebességének meghatározás:	2 pont
	Összesen: 20 pont

A II. megoldást követők dolgozatának pontozása

a) Annak a határesetnek a felismerése, hogy a kis test és a korong úgy ér el a közös sebességet, hogy a kis test eljut a korong szélére: 2 pont

A korong és a test közös sebességének megállapítása a lendület-megmaradás törvény alkalmazásával: 2 pont

A súrlódási munka (súrlódási hő) helyes kiszámolása: 2 pont

Munkatétel helyes alkalmazása a jelenségre: 2 pont

A mozgási energia csökkenésének helyes felírása, megadása: 2 pont

A keresett v meghatározása: 2 pont

b) Annak megállapítása, hogy v_1 sebesség esetén a test nem fog lecsúszni a korongról: 2 pont

A v_k közös sebesség meghatározása: 2 pont

Annak megállapítása, hogy v_2 sebesség esetén a test le fog csúszni a korongról: 2 pont

A korong és a test sebességének meghatározása a lendület-megmaradás-, és a munkatétel segítségével: 2 pont

Összesen: 20 pont

3. feladat

Annak felismerése, hogy a tömegközéppontnak helyben kell maradnia: 3 pont

Annak felismerése, hogy a folyamat lényegében izobár: 2 pont

Annak felismerése, hogy csak a gáz vesz fel energiát a fűtőszáltól: 2 pont

A fűtőszál által leadott energia kiszámítása: 1 pont

Az első főtétel helyes felírása: 1 pont

A gáz tágulási munkájának helyes meghatározása: 1 pont

A felvett hő és a térfogatváltozás kapcsolatának helyes felírása: 2 pont

A térfogatváltozás kiszámítása: 1 pont

A dugattyú relatív elmozdulásának meghatározása: 1 pont

A dugattyú és henger abszolút elmozdulásának kifejezése a relatív elmozdulással: 2 pont

A tömegközéppont helyben-maradásának helyes figyelembevétele: 2 pont

A kocsi elmozdulásának helyes meghatározása: 2 pont

Összesen: 20 pont

4. feladat

a) A kérdezett feszültség helyes meghatározása: 10 pont

b) A kérdezett áramerősség megváltozásának helyes meghatározása: 6 pont

c) A leadott teljesítmény meghatározása az első esetben: 2 pont

A leadott teljesítmény meghatározása a második esetben: 2 pont

Összesen: 20 pont

A részpontszámok ésszerűen tovább bonthatók. Ha a versenyző eljut az eredő ellenállás kiszámításához (13/23 Ω), de tovább nem jut, akkor kapjon 5 pontot.

Általános megjegyzés: A számítások során a g = 9,81 m/s^2-tel, és a g = 10 m/s^2-tel számolók kissé eltérő eredményt kapnak, ennek ellenére mindkét megoldás a teljes pontszámot kapja meg!