A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA

I. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat: *A képzeletbeli OKTV/2016 csillag körül körpályán keringő, homogén tömegeloszlású, gömb alakú, légkör nélküli 2016/FIZ jelű exobolygó tömege* M = 3 · 10^24^ kg, *sugara* R = 8000 km, *tengely körüli forgásának periódusideje* 1 fizi nap, *ami* T = 4,8 földi óra.

a) Mekkora a bolygó felszínén, az egyenlítője mentén a nehézségi gyorsulás?

b) Legközelebb mennyi idő múlva lesz a bolygó felszínéhez nagyon közel, az egyenlítő mentén keringő űrállomás újra az egyenlítő egy tetszőlegesen kiválasztott pontja felett?

c) Három fizi nap *alatt hány „csillag-lemente" van az űrállomáson? (*Egy fizi év *sokkal nagyobb* egy fizi nap*nál.)*

d) Eljuthat-e egy hajtómű nélküli űrszonda tetszőleges távolságra a bolygótól, ha a bolygó felszínéről úgy indítják el, hogy kezdősebessége a bolygó tengelyéhez képest 6 km/s *nagyságú, és a bolygón kívül minden más égitest hatásától eltekinthetünk?*

Megoldás. *a)* A nehézségi gyorsulást a nehézségi erő (mg) és a tömeg hányadosaként számíthatjuk ki. A nehézségi erő (ami nem feltétlenül azonos az F_g gravitációs erővel) nagyság és irány szerint megegyezik a test súlyával ($G = mg$), ami a nyugvó test esetében az alátámasztást nyomja, vagy a felfüggesztést húzza, így a testre ható tartóerő: $T = -G$. A tengely körüli forgást végző bolygó egyenlítője mentén nyugvó m tömegű testre a fentiek szerint két erő hat, a gravitációs erő

$$F_g = \gamma \frac{Mm}{R^2} = \left(3{,}13 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot m,$$

illetve a T tartóerő. Ezek eredője nem nulla, hanem a forgás miatt éppen az ma_{cp} centripetális erő:

$$\sum F = F_g + T = ma_{cp} = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(1{,}06 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot m,$$

és ennek megfelelően a nehézségi erő:

$$mg = G = -T = F_g - ma_{cp} = \left(2{,}07 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot m,$$

vagyis a nehézségi gyorsulás $g = \mathbf{2{,}07 \frac{m}{s^2} \approx 2 \frac{m}{s^2}}$.

Megjegyzés: A bolygóval együtt forgó koordinátarendszerben az elengedett testre a gravitációs erő és a vele ellentétes centrifugális erő hat, tehát az elengedés pillanatában a test gyorsulása:

$$a = g = \frac{F_g + ma_{cf}}{m} = \frac{\gamma \frac{Mm}{R^2} - mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{m} = 3{,}13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 1{,}06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{2{,}07\,\frac{m}{s^2} \approx 2\,\frac{m}{s^2}}.$$

b) A felszínhez közel keringő, *m* tömegű űrállomásra írjuk fel a mozgásegyenletet:

$$F_g = \gamma \frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R},$$

amiből

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} = 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Ez az űrállomás sebessége a bolygó középpontjához képest. A tengely körüli forgás miatt a bolygó egyenlítőjének pontjai

$$v_e = \frac{2\pi R}{T} = 2{,}91\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel mozognak, tehát az űrállomás relatív sebessége a közeli bolygófelszínhez képest vagy

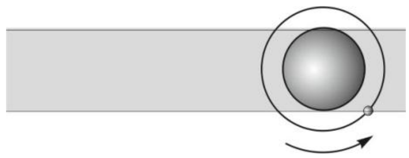
$$v_{\text{ellen}} = 7{,}91\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, \quad \text{vagy} \quad v_{\text{azonos}} = 2{,}09\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Tehát attól függően, hogy az űrállomás keringési iránya ellentétes vagy azonos a bolygó tengely körüli forgásirányával, a keresett idő

$$T_{\text{ellen}} = \frac{2\pi R}{v_{\text{ellen}}} \approx \mathbf{1{,}8\,h}, \quad \text{vagy} \quad T_{\text{azonos}} = \frac{2\pi R}{v_{\text{azonos}}} \approx \mathbf{6{,}7\,h.}$$

Megjegyzés: A felszínről indított űreszközök szinte mindig azonos forgásirányban indulnak, mert így sokkal kisebb energia befektetéssel lehet őket pályára állítani. Azok a versenyzők, akik ezt megemlítve csak a hosszabb időt számították ki, teljes részpontszámot kaphatnak.

c) A csillagfény Fiz bolygó miatti árnyékának helyzete a rövid időtartam alatt nem változik lényegesen, így az a kérdés, hogy az űrállomás az adott idő, $3T$ = 14,4 óra alatt hányszor kerül az árnyéktér szélére, ami $t = \frac{3T}{T_0} = 5{,}6$ miatt 5 vagy 6 alkalmat jelent, attól függően,



hogy hol volt kezdetben az űrállomás. Itt $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}} = 2{,}79$ h, az R sugarú körpályán keringés periódusideje.

d) Egy test összes mechanikai energiája

$$E_ö = E_{\text{mozg}} + E_{\text{pot}}, \quad \text{ahol} \quad E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{és} \quad E_{\text{pot}} = -\gamma\frac{mM}{r}.$$

(A gravitációs helyzeti energiát például az elektromos potenciális energia mintájára kaphatjuk meg. A potenciális energia nulla szintje ekkor is a „végtelenben” van).
Akkor juthat tetszőleges messzire a szonda, ha a bolygótól nagyon messze mozgási energiája van, ott viszont helyzeti energiája szinte nulla, vagyis $E_ö \geq 0$.
A mechanikai energia megmaradás miatt ennek a felszínen is teljesülni kell, azaz

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-\gamma\frac{mM}{R}\right)\geq 0$$

vagyis

$$v^2\geq\gamma\frac{2M}{R},$$

ebből
$$v\geq\sqrt{\gamma\frac{2M}{R}}=\mathbf{7074}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\approx\mathbf{7}\,\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{s}}.$$

Esetünkben ez nem teljesül, ezért a szonda **nem juthat tetszőleges messzire** a bolygótól.

Megjegyzés: Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha a felszín közelében 6 km/s sebességű űrszonda teljes energiájáról mutatja meg a versenyző, hogy az negatív értékű.

2. feladat: *Vízszintes helyzetű, könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben egynemű gáz van, kezdeti térfogata* 20 liter. *A gázt lassan addig melegítjük, amíg a környezetén* 2300 J *munkát végez, és ezalatt a belső energiája* 12 900 J-*ra nő. A külső légnyomás* 10^5 Pa.

a) Mekkora a gázrészecskék szabadsági fokszáma?
b) Hányszorosára emelkedett a gáz abszolút hőmérséklete?
c) Mekkora a gáz térfogata a végállapotban?

Megoldás. *a)* Mivel a henger vízszintes helyzetű, és a dugattyú könnyen mozgó, így a gáz állapotváltozása izobár folyamat, nyomása mindvégig $p=10^5$ Pa. A gáz f szabadsági fokszáma a belső energia változásának a kifejezéséből határozható meg:

$$\Delta E=E_2-E_1=\frac{f}{2}nR\Delta T=\frac{f}{2}p\Delta V=\frac{f}{2}|W|,$$

ahol $W=-p\Delta V$ a gázon végzett munkát jelenti, ennek abszolút értéke esetünkben a gáz által a környezeten végzett munka. A gáz kezdeti belső energiája $E_1=\frac{f}{2}pV_1$, a folyamat végén pedig E_2 = 12 900 J. A belső energia megváltozása: $\Delta E=E_2-E_1=E_2-\frac{f}{2}pV_1$, vagyis a szabadsági fokok száma a következő egyenletből számítható:

$$f=\frac{2\Delta E}{|W|}=2\frac{E_2-\frac{f}{2}pV_1}{|W|},$$

amiből

$$f=\frac{2E_2}{|W|+pV_1}\equiv\mathbf{6}.$$

b) A végső és a kezdeti hőmérsékletek aránya megegyezik a belső energiák arányával. A végállapot belső energiájának értéke adott (E_2 = 12 900 J), a kezdeti belső energiát a szabadsági fokszám segítségével kaphatjuk meg:

$$E_1=\frac{f}{2}nRT_1=\frac{f}{2}pV_1=6000\text{ J},$$

tehát a gáz hőmérséklete

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{E_2}{E_1}=\mathbf{2{,}15}\text{ -szörösére emelkedett.}$$

c) Izobár állapotváltozás esetén a hőmérsékletváltozás aránya megegyezik a térfogatváltozás arányával, tehát a gáz végső térfogata 2,15 · 20 liter = **43 liter**.

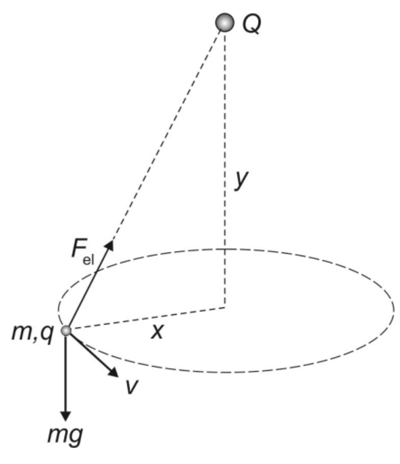
Megjegyzés: A gáz által végzett munkából közvetlenül ki tudjuk számítani a térfogatváltozást: $\Delta V = \frac{W_{\text{gáz}}}{p} = \frac{2300\ \text{J}}{10^5\ \text{Pa}} = 23$ liter, amiből a végső térfogat (20 + 23) liter = 43 liter. Ebből azonnal megkaphatjuk a végső és a kezdeti hőmérsékletek arányát: 43/20 = 2,15. Így visszafelé ki tudjuk számítani a kezdeti belső energiát: $E_1 = \frac{E_2}{2{,}15} = 6000\ \text{J}$, tehát a belső energia változása ΔE = (12 900 – 6000) J = 6900 J, amit így is felírhatunk: $\Delta E = \frac{f}{2} p \Delta V,$ tehát a szabadsági fokszám: $f = \frac{2\Delta E}{p\Delta V} = \frac{2 \cdot 6900\ \text{J}}{10^5\ \text{Pa} \cdot 23 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3} \equiv 6$. Visszafelé haladva talán egyszerűbb a megoldás.

3. feladat: *Rögzített,* $Q = 10^{-7}$ C *elektromos töltésű, pontszerű test alatt* y = 0,01 m *távolságban lévő pont mint középpont körül* x = 0,1 m *sugarú, vízszintes körpályán egyenletes körmozgást végez egy pici, elektromosan töltött olajcsepp.*
(A csepp légüres térben mozog. Számoljunk g = 10 m/s² *értékkel.*)

a) Határozzuk meg az egyenletes körmozgást végző olajcsepp q/m fajlagos töltését!
b) Határozzuk meg a csepp v sebességét!
c) Ez a pontszerű test a Q töltés alatt, ugyanakkora sebességgel, különböző y távolságokban, különböző x sugarú körpályákon képes mozogni. Milyen felületet határoz meg az összes ilyen lehetséges pálya?
d) Mekkora az x = 0,1 m *sugarú körpályán mozgó,* 0,01 g *tömegű olajcsepp által keltett mágneses indukció a körpálya középpontjában?*

Megoldás: Adatok: x = 0,1 m, y = 0,01 m, $Q = 10^{-7}\ \text{C}$, $m = 10^{-5}\ \text{kg}$.

a) A töltött cseppre alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét:



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}\,.$$

A függőleges irány mentén a csepp nem gyorsul, ezért

$$\sum \vec{F}_y = 0\,.$$

$$mg = F_{el,y}$$

$$mg = \frac{kQq}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{kQqy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

$$\frac{q}{m} = \frac{g}{kQ} \cdot \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y} = \mathbf{1{,}13 \cdot 10^{-3}\ \frac{C}{kg}}.$$

b) A pontszerű testnek x-irányban centripetális gyorsulása van, ennek dinamikai feltétele:

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

$$ma_{cp} = \frac{kQq}{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$m\frac{v^2}{x} = \frac{kQq}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletek hányadosát véve:

$$\frac{v^2}{g\cdot x} = \frac{x}{y}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{y}}\cdot x = \mathbf{3{,}16\ m/s}.$$

c) A *b)* kérdés megoldása alapján $y = \frac{g}{v^2}\cdot x^2$. Ez a felület egy **forgásparaboloid**.

d) Az olajcsepp elektromos töltése: $q = 1{,}13\cdot10^{-3}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\cdot10^{-5}\ \mathrm{kg} = 1{,}13\cdot10^{-8}\ \mathrm{C}$.

Az *x* sugarú, *I* áramú körvezető mágneses terének indukciója a kör középpontjában:

$$B = \frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{I}{x}$$

Az áramerősséget úgy számíthatjuk ki, hogy a töltés nagyságát elosztjuk a körmozgás periódusidejével: $I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2x\pi}\cdot v \approx 5{,}68\cdot10^{-8}\ \mathrm{A}$.

Ezt helyettesítsük be a mágneses indukció kifejezésébe, és így a végeredmény:

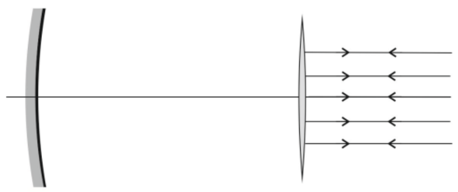
$$B = \frac{\mu_0\cdot q\cdot v}{4\pi\cdot x^2} = \mathbf{3{,}57\cdot10^{-13}\,T.}$$

(Ami igen-igen csekély!)

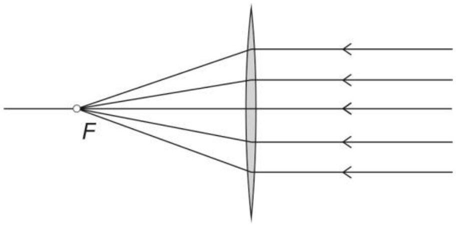
Megjegyzés: A mozgó töltés mágneses indukcióját a Biot-Savart törvény alapján is meghatározhatjuk: $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{r^2}\sin\alpha$, ha az áramerősséget $I = q/\Delta t$, a Δl szakaszt $\Delta l = v\Delta t$ alakban fejezzük ki, *r* helyére *x*-et írunk, és az $\alpha = 90°$-ot helyettesítjük be.

4. feladat: *Egy gyűjtőlencsére az optikai tengelyével párhuzamos fénysugarak érkeznek. A lencse túlsó oldalán, az optikai tengelyre merőlegesen, a lencsével szemben egy, a lencsével megegyező, f fókusztávolságú homorú tükör van.*

a) A fénysugarak a lencsén áthaladva, a tükörről visszaverődve, és ismét áthaladva a lencsén, az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak.
Mekkora lehet a lencse és a tükör távolsága?



b) Legyen a lencsének a tükörtől való távolsága 2f. Érkezzenek továbbra is az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak a lencsére! Hogy haladnak a fénysugarak a lencse–tükör–lencse rendszeren való áthaladás után?

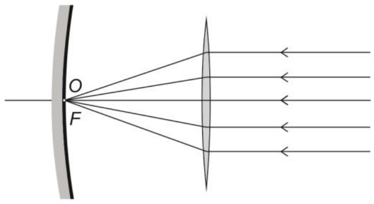


I. Megoldás. *a)* A lencse az érkező fénysugarakat az *F* fókuszban gyűjti össze, vagyis azon keresztül haladnak. A fény útjának megfordíthatósága miatt csak akkor mennek a lencsét elhagyó fénysugarak az optikai tengellyel párhuzamosan, ha az *F* fókuszon keresztül közelítenek a lencséhez.

A homorú tükörnek tehát az *F* pont a tárgypontja, és egyben a képpontja is. (*)

Ez két módon is bekövetkezhet:

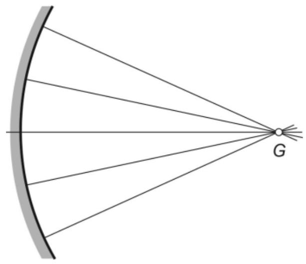
1. Az *F* pont a homorú tükör optikai középpontja.



Ebben az esetben a homorú tükör síktükörként veri vissza a fénysugarakat, melyek tehát a lencsét elhagyva, annak tengelyével párhuzamosan haladnak. (Azok a sugarak, melyek a tengely fölött voltak, azok a tengely alatt fognak haladni, és fordítva, amelyek alatta, azok felette.) Ebben az esetben a lencse tükör távolság $\boldsymbol{d_1 = f}$.

2. Az ***F*** pont a homorú tükör geometriai középpontja. A *G* geometriai középponton átmenő fénysugarak önmagukban verődnek vissza.

A lencse és a tükör távolsága tehát a fókusztávolság háromszorosa,



$$\boldsymbol{d_2 = 3f.}$$

II. Megoldás.

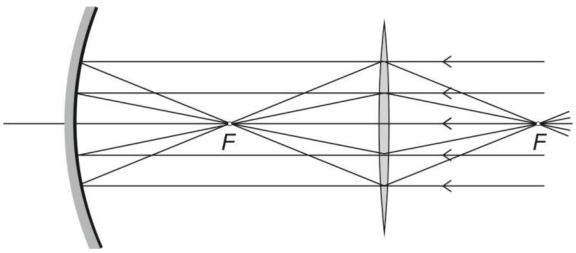
Az előző megoldás folytatása (*)-tól.

A leképezési törvény szerint $\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$, ha $f \neq 0$.

A leképezési törvényből $k = \frac{t \cdot f}{t - f}$. Ezért $t = 0$ esetén $k = 0$, tehát a kép a homorú tükrön azonos a tárggyal. Ez elrendezés megfelel a célnak, vagyis a keresett távolság $d_1 = f$.

Ha $t \neq 0$, akkor $k = t$ miatt $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t}$, amiből $t = 2f$ (vagyis a tárgy a geometriai középpontban van). A kérdéses távolság ezzel $d_2 = 3f$.

b) Ekkor a lencse-tükör távolság $2f$. A lencse és a tükör fókusza egybeesik, vagyis a tükörről visszaverődő fénysugarak párhuzamosak az optikai tengellyel, így érkeznek a lencséhez, melyen megtörve, annak (jobb oldali) **fókuszán mennek át.**



Pontozási útmutató

1. feladat

a) A nehézségi gyorsulás meghatározása	4 pont
(aki a bolygó forgását nem veszi figyelembe, csak 1 pontot kaphat)	
b) A dinamikai egyenlet felírása	2 pont
A bolygó forgásának figyelembe vétele	2 pont
A kétféle forgásirány észrevétele	2 pont
c) A „csillag-lementék” lehetséges számának meghatározása	5 pont
d) A kérdés energetikai alapon történő eldöntése	5 pont
	összesen: 20 pont

2. feladat

a) A részecskék szabadsági fokszámának meghatározása	10 pont
b) A végső és a kezdeti hőmérsékletek arányának meghatározása	6 pont
c) A gáz végső térfogatának meghatározása	4 pont
	összesen: 20 pont

3. feladat

a) A dinamika alapegyenletének helyes alkalmazása a függőleges irányban:	3 pont
A q/m hányados helyes kifejezése, illetve kiszámolása:	2 + 1 pont
b) A dinamika alapegyenletének helyes alkalmazása a vízszintes irányban:	3 pont
Az olajcsepp sebességének helyes kifejezése, illetve kiszámolása:	2 + 1 pont
c) Az $y(x)$ függvény megadása:	2 pont
A felület megnevezése:	2 pont
d) A körpályán mozgó töltött olajcsepp által keltett elektromos áram kifejezése, illetve kiszámolása:	1 + 1 pont
A mágneses indukció megadása, illetve kiszámolása:	1 + 1 pont
	összesen: 20 pont

4. feladat

a) Annak észrevétele, hogy a tükröt „elhagyva” a lencse fókuszán kell átmenni a fénysugaraknak	5 pont
A homorú tükör az optikai középpontba esik, a keresett távolság f	5 pont
A lencse fókusza a tükör geometriai középpontja	4 pont
Ebben az esetben a keresett távolság $3f$	1 pont
b) Annak észrevétele, hogy a tükörről visszaverődő fénysugarak párhuzamosak az optikai tengellyel	3 pont
A fénysugarak a lencse (jobb oldali) fókuszán mennek át	2 pont
	összesen: 20 pont

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A nehézségi gyorsulás értékére 9,81 m/s^2 vagy 10 m/s^2 egyaránt elfogadható, hacsak a feladat máshogy nem rendelkezik.